Hoàng Chúng (Chủ biên)
Nguyễn Vĩnh Cận
Vũ Thế Hựu

ĐỂ HỌC TỐT
TOÁN 8
HÌNH HỌC

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Hoàng đế Ai cập Ptolémée hỏi nhà toán học Euclide:

– Không lẽ ta lại phải đọc đủ cả 13 quyển trong bộ sách của nhà ngươi sao? Như mọi vị vua anh minh khác, ta cần biết hình học là gì nhưng nhà ngươi hãy nói cho ta hay, liệu ta có thể đến với hình học bằng con đường khác ngắn hơn không?

– Tâu bệ hạ, trong khoa học không có con đường dành riêng cho vua chúa, mà chỉ có con đường dành cho những người kiên trì, nhẫn nại. **Euclide trả lời.**

CHƯƠNG I

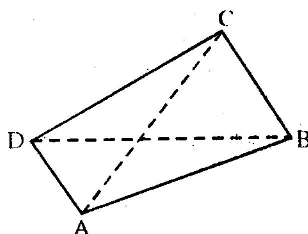
TỨ GIÁC VÀ ĐA GIÁC

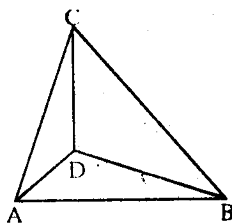
§1. TỨ GIÁC

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Tứ giác ABCD là một hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kì hai đoạn nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

2. Tứ giác đơn là tứ giác mà các cạnh chỉ cắt nhau tại các đỉnh.

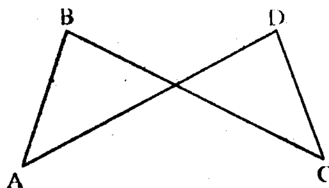




Một tứ giác đơn chia mặt phẳng thành hai miền:

– Miền trong là miền không chứa bất kì đường thẳng nào.

– Miền ngoài là miền còn lại.



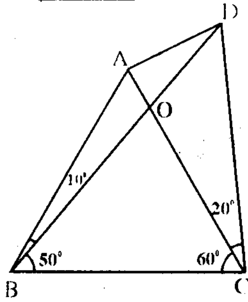
3. Tứ giác lồi là một tứ giác nằm trong một nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của nó.

II. TÍNH CHẤT CỦA TỨ GIÁC LỒI

Định lí 1. Một tứ giác là lồi khi và chỉ khi hai đường chéo của nó cắt nhau.

Định lí 2. Tổng số đo các góc của một tứ giác bằng 360°.

Bài 1



Cho tứ giác ABCD với các giả thiết ghi trên hình vẽ bên.

1. Tính các góc của tứ giác

2. Tam giác AOD có gì đặc biệt ?

Bài 2

Chứng minh rằng trong một tứ giác, nếu tất cả các góc đều lớn hơn 89° thì tất cả các góc cũng nhỏ hơn 93°.

GỢI Ý :

Chứng minh bằng phản chứng: giả sử có một góc *lớn hơn hay bằng* 93°; thế thì tổng các góc của tứ giác lớn hơn $89^\circ + 89^\circ + 89^\circ + 93^\circ$, vô lí (vô lí ở chỗ nào?).

Hãy chứng minh bằng phản chứng bài số 3 sau đây:

Bài 3

a) Nếu một tứ giác lồi có các góc không bằng nhau thì nó có ít nhất một góc nhọn.

b) Nếu một tứ giác lồi có các góc không bằng nhau thì nó có ít nhất một góc tù.

CHÚ Ý: Từ các mệnh đề a) và b) liệu có thể phát biểu thành định lí: "Một tứ giác lồi phải có ít nhất một góc nhọn và một góc tù" được không?

GỢI Ý: Chú ý đến giả thiết "có các góc không bằng nhau".

Bài 4

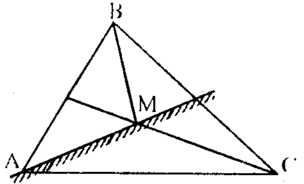
Cho tam giác ABC.

a) Các trung tuyến phát xuất từ đỉnh A và C cắt nhau tại điểm M. Tứ giác ABCM là lồi hay không lồi? Vì sao?

b) M là một điểm tùy ý trong mặt phẳng của tam giác ABC (không thẳng hàng với hai đỉnh nào của tam giác). Với vị trí nào của M thì bốn điểm A, B, C, M là các đỉnh của một tứ giác lồi.

c) M và N là hai điểm tùy ý thuộc miền trong của tam giác ABC (và không thẳng hàng với đỉnh nào của tam giác). Chứng minh rằng trong năm điểm A, B, C, M, N bao giờ cũng chọn ra được bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

GIẢI



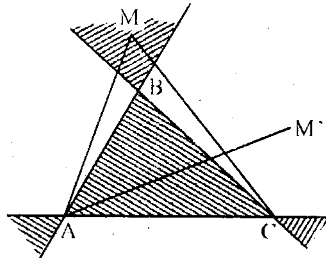
a) *ABCM không lồi* (lõm), vì B và C nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa AM

b) Kết quả ở câu a) cũng đúng khi M là một điểm bất kì *thuộc miền trong của tam giác ABC.*

Nếu M thuộc *miền ngoài của ABC* thì có hai trường hợp:

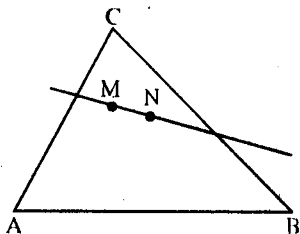
– M ở trong góc đối đỉnh của một góc của tam giác. M ở trong góc đối đỉnh của góc B. Dễ thấy rằng lúc đó đỉnh B lại là điểm thuộc miền trong của tam giác MAC, do đó AMCB *không lồi* (lõm).

– M ở trong một góc của tam giác. M' nằm trong góc A. Do đó AM' là tia trong của góc A, mà A và M' nằm ở hai phía của cạnh BC, cho nên đoạn thẳng AM' cắt đoạn thẳng BC và ABM'C là *tứ giác lồi.*



Tóm lại, các miền được gạch chéo là tập hợp các điểm M mà MABC là *tứ giác lõm.*

Các miền khác (để trắng) là tập hợp các điểm M mà M, A, B, C là *các đỉnh của tứ giác lồi.*



c) Đường thẳng đi qua hai điểm M, N bao giờ cũng không cắt một cạnh của tam giác ABC. Giả sử đường thẳng MN không cắt AC. Tứ giác MNCA là tứ giác lồi (điểm N thuộc miền ngoài của tam giác MAC và nằm trong góc MAC).

Bài 5

Cho tứ giác ABCD là tứ giác lồi.

Các tứ giác BACD, CBAD, ACBD có phải là tứ giác lồi hay không?

Bài 6

Chứng minh rằng trong một tứ giác lồi tổng độ dài các cạnh (chu vi) lớn hơn tổng độ dài các đường chéo và nhỏ hơn hai lần tổng độ dài các đường chéo.

GỢI Ý về phương pháp chung

Đây là một bài toán chứng minh bất đẳng thức về các độ dài. Nên kẻ thêm các đường phụ, xét các tam giác để áp dụng mệnh đề: "Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh lớn hơn độ dài cạnh thứ ba".

GIẢI

Cho tứ giác ABCD. Ta phải chứng minh:

$AC + BD < AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$

1) Chứng minh: $AC + BD < AB + BC + CD + DA$

Ta có: $AC < AB + BC$ (bất đẳng thức trong Δ ABC)

$AC < AD + DC$ (bất đẳng thức trong Δ ADC)

$BD < BC + CD$ (bất đẳng thức trong Δ BCD)

$BD < BA + AD$ (bất đẳng thức trong Δ BAD)

Từ đó:

$2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA)$

$AC + BD < AB + BC + CD + DA$, đpcm.

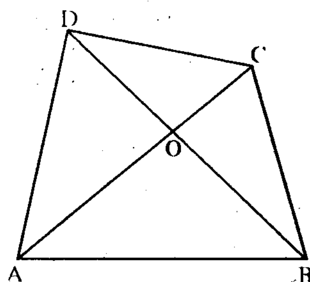
2) Chứng minh $AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của ABCD.

Trong các tam giác ABO và CDO ta có:

$AB < BO + OA$

$CD < CO + OD$



$\Rightarrow AB + CD < (BO + OD) + (CO + OA)$

$\Rightarrow AB + CD < BD + AC$ (1)

Tương tự, trong các tam giác BCO và ADO, ta có

$AD + BC < BD + AC$ (2)

Từ (1) và (2) ta được:

$AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$.

NHẬN XÉT

1. Trong các bất đẳng thức (1), (2) ta thấy vế trái là tổng của hai cạnh đối của tứ giác, còn vế phải là tổng của hai đường chéo. Vậy có thể phát biểu mệnh đề:

"Trong một tứ giác lồi, tổng của hai cạnh đối nhỏ hơn tổng của hai đường chéo".

2. Hãy xét xem trong trường hợp tứ giác ABCD là *tứ giác không lồi* thì các bất đẳng thức (1) và (2) còn đúng không? Vì sao?

3. Từ các kết quả trên, ta có thể suy ra bất đẳng thức kép:

$$\frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) < AC + BD < AB + BC + CD + DA$$

Hãy phát biểu thành một mệnh đề.

Bài 7

Cho tứ giác lồi ABCD có đường chéo AC bằng cạnh AD.

Chứng minh BC < BD.

Bài 8

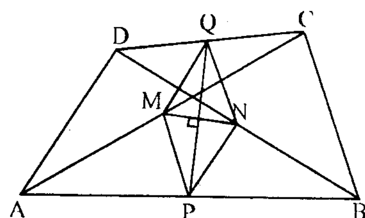
Cho tứ giác ABCD có P và Q là trung điểm của AB và CD, M và N là trung điểm của các đường chéo AC và BD.

Chứng minh BC = AD ⇒ MN ⊥ PQ.

GIẢI

Trong Δ ACD, QM là đường trung bình nên

$$QM = \frac{1}{2} AD \qquad (1)$$



Tương tự, ta có

$$QN = \frac{1}{2} BC \qquad (2)$$

$$PM = \frac{1}{2} BC \qquad (3)$$

$$PN = \frac{1}{2} AD \qquad (4)$$

Giả thiết BC = AD (5)

Từ (1), (2), (5) suy ra QM = QN

(3), (4), (5) suy ra PM = PN

Hai điểm P, Q nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN.

Vậy $MN \perp PQ$.

CHÚ Ý: – Cùng với các giả thiết của bài toán, ta có thể chứng minh được $MN \perp PQ \Rightarrow BC = AD$.

– Kết hợp hai kết quả này, ta có bài toán:

"Cho tứ giác ABCD có P và Q là trung điểm của AB và CD; M và N là trung điểm của các đường chéo AC và BD. Điều kiện cần và đủ để $MN \perp PQ$ là $BC = AD$".

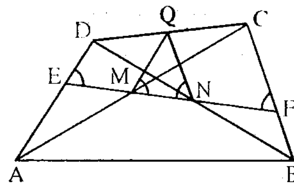
(Kí hiệu $MN \perp PQ \Leftrightarrow BC = AD$).

Bài 9

Cho tứ giác ABCD có AD = BC. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tạo với AD và BC các góc bằng nhau.

GỢI Ý:

Gọi M, N, Q theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD và cạnh DC; E, F theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng MN với AD và BC.



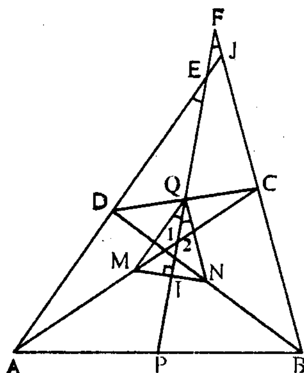
Từ bài tập 8 ta đã có $QM = QN \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N}$

Dễ thấy $\widehat{E} = \widehat{M}$, $\widehat{F} = \widehat{N}$

Bài 10

Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD. Tia PQ cắt tia AD ở E và cắt tia BC ở F.

Chứng minh $AD = BC \Rightarrow \widehat{AEP} = \widehat{BFP}$.



GỢI Ý

Ta gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD.

Trong bài 8, ta đã có Δ MQN cân và QP ⊥ MN nên suy ra $\widehat{Q_1} = \widehat{Q_2}$.

Dễ thấy $\widehat{Q_1} = \widehat{AEP}$ và $\widehat{Q_2} = \widehat{BFP}$

CHÚ Ý: Cũng với các giả thiết trên, ta chứng minh được điều ngược lại:

$$\widehat{AEP} = \widehat{BFP} \Rightarrow AD = BC$$

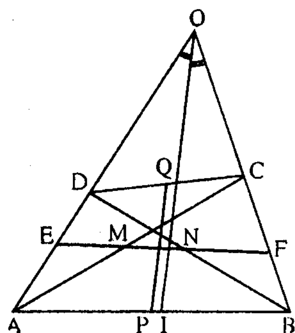
Kết hợp hai kết quả, ta có bài toán:

"Cho tứ giác ABCD. Gọi P và Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tia PQ cắt tia AD tại điểm E và cắt tia BC tại điểm F. Chứng minh điều kiện cần và đủ để $\widehat{AEP} = \widehat{BFP}$ là AD = BC".

(Kí hiệu : $\widehat{AEP} = \widehat{BFP} \Leftrightarrow AD = BC$)

Bài 11

Cho tam giác OAB. Trên cạnh OB có một điểm C và trên cạnh OA có một điểm D sao cho AD = BC. P, Q theo thứ tự là các trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD.



Chứng minh rằng PQ song song với phân giác của góc AOB.

GỢI Ý

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD và MN cắt OA ở E, cắt OB ở F.

Theo kết quả bài 8; ta có

PQ ⊥ MN (1)

Suy tu kết quả bài 10, ta được

$$OI \perp MN \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

NHẬN XÉT

1. Khác mà giống

Thoạt nhìn bốn bài toán 8, 9, 10, 11 là những bài toán khác nhau. Thế nhưng, nếu phân tích kĩ, ta thấy rằng chúng rất giống nhau;

Về *giả thiết,* trong cả bốn bài toán đều gồm có:

- Một tứ giác (ABCD)

- Có một cặp cạnh bằng nhau (AD = BC)

- Các trung điểm (của các cạnh, của các đường chéo).

Về *kết luận* thì rõ ràng là từ kết luận này, ta dễ dàng suy ra được kết luận kia và ngược lại.

Có thể nói, bốn bài toán là bốn cách phát biểu khác nhau của một bài mà thôi!

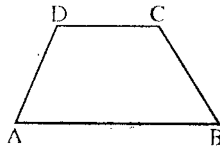
Như vậy, trước khi giải một bài toán, ta nên phân tích thật kỹ giả thiết, kết luận, cố gắng liên hệ với các bài toán đã giải, biết đâu có thể gặp lại "người quen cũ". Trong công việc này, nhiều lúc ta phải thay đổi cách nhìn, cách thể hiện các giả thiết, khai thác các kết quả để có được nhiều bài toán dưới nhiều cách phát biểu khác nhau.

2. Có thể chứng minh bài 11 dựa vào bài 10 bằng cách vẽ thêm đường phụ.

§2. HÌNH THANG

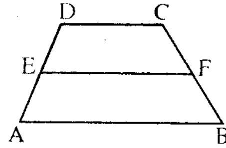
I. HÌNH THANG

1. Định nghĩa



Hình thang là tứ giác có hai cạnh song song

2. Tính chất của đường trung bình



Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa tổng độ dài hai đáy.

II. HÌNH THANG CÂN

1. Định nghĩa

Hình thang cân là hình thang có hai góc ở đáy bằng nhau

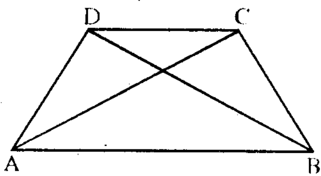
2. Tính chất

Định lí 1. Trong một hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

$$AB \mathbin{//} CD : \widehat{A} = \widehat{B} \Rightarrow AD = BC.$$

Định lí 2. Trong một hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Ngược lại, một hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân.



$$AB \mathbin{//} CD \Leftrightarrow AC = BD.$$

3. Dấu hiệu nhận biết hình thang – Hình thang cân

Hình thang: tứ giác có một cặp cạnh song song.

Hình thang cân: một trong hai dấu hiệu

– Hình thang có hai góc ở một đáy bằng nhau;

– Hình thang có hai đường chéo bằng nhau.

Bài 12

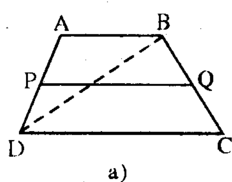
Dựa vào những cách vẽ thêm đường phụ dưới đây để thực hiện phép chứng minh tương ứng cho định lí về đường trung bình của hình thang:

a) Kẻ đường chéo BD (h.a)

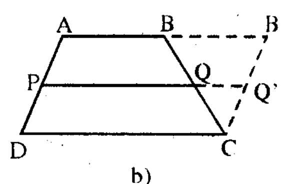
b) Kéo dài đáy AB cắt đường thẳng qua C song song với AD tại B' (h.b)

c) Kẻ các đường cao AA', BB' (h.c)

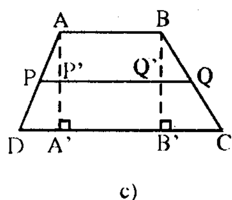
d) Lấy điểm M bất kỳ trên đáy CD rồi nối AM và BM. (h.d)



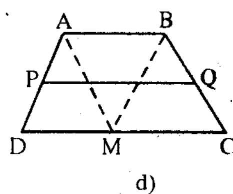
a)



b)



c)



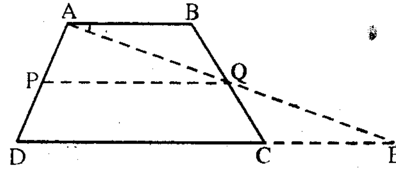
d)

Bài 13

Chứng minh rằng "Nếu một tứ giác lồi có đoạn thẳng nối các trung điểm của một cặp cạnh đối diện bằng nửa tổng độ dài của cặp cạnh còn lại thì tứ giác đó là hình thang".

GIẢI

GT	ABCD lồi PA = PD QB = QC $PQ = \frac{AB + CD}{2}$
KL	AB // CD



Kéo dài AQ một đoạn QE = AQ. Nối C với E. Ta chứng minh ba điểm, D, C, E thẳng hàng.

$$\Delta\ ABQ = \Delta\ ECQ\ (cgc) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E}$$

$$\Rightarrow \quad AB = CE \text{ và } AB\ //\ CE \qquad (1)$$

Trong Δ ADE, PQ là đường trung bình, nên

$$PQ = \frac{DE}{2} \text{ và } PQ\ //\ DE\ (2)$$

Theo giả thiết: $PQ = \frac{AB + CD}{2}$ (3)

Từ (2) và (3), có AB + CD = DE, kết hợp với (1) có

$$CE + CD = DE$$

Đẳng thức này chứng tỏ D, C, E thẳng hàng, và từ (1) suy ra AB // CD, đpcm.

CHÚ Ý:

Bài toán này thực chất là định lí đảo của định lí về đường trung bình của hình thang.

Bài 14

Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi P và Q là trung điểm của hai cạnh AD và BC.

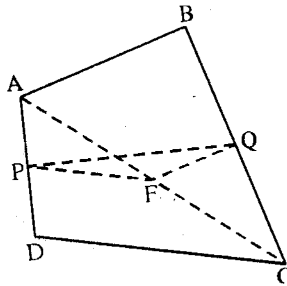
Chứng minh rằng $PQ \le \frac{AB + DC}{2}$

GỢI Ý:

Ở đây có bất đẳng thức giữa độ dài các đoạn thẳng, nên cần kẻ đường phụ để có các hình tam giác, lại có trung điểm của các cạnh, nên nghĩ đến việc áp dụng định lí về đường trung bình trong tam giác.

GIẢI

GT:	Tứ giác ABCD PA = PD, QB = QC
KL:	$PQ \le \frac{DC + AB}{2}$



Ta kẻ thêm đường chéo AC và lấy trung điểm F của AC.

Trong tam giác ACD, PF là đường trung bình, do đó:

$$PF = \frac{DC}{2}$$

Trong tam giác ABC, QF là đường trung bình, do đó:

$$QF = \frac{AB}{2}$$

Nếu P, Q và F không thẳng hàng thì trong tam giác PQF ta có:

$$PQ < PF + QF = \frac{DC + AB}{2}$$

Nếu P, Q và F thẳng hàng thì F là điểm thuộc đoạn thẳng PQ và ta có:

$$PQ = PF + QF = \frac{DC + AB}{2}$$

Như vậy, trong mọi trường hợp, ta có:

$$PQ \le \frac{DC + AB}{2}, \text{ đpcm}.$$

NHẬN XÉT:

Có thể thấy ngay rằng:

P, Q, F thẳng hàng $\Leftrightarrow$ AB // CD

Do đó, ta đã chứng minh được rằng:

$$PQ \le \frac{CD + AB}{2}$$

trong đó dấu = xảy ra *khi và chỉ khi AB // CD.*

Như vậy, qua việc giải bài toán trên, ta đã chứng minh *cùng một lúc* hai định lí:

(1) Nếu ABCD là hình thang (AB // CD) thì $PQ = \frac{CD + AB}{2}$

(2) Nếu ABCD không là hình thang (AB $\not\parallel$ CD)

thì $PQ \ne \frac{CD + AB}{2}$ $\left(PQ < \frac{CD + AB}{2}\right)$.

Định lí (1) là định lí về đường trung bình của hình thang.

Định lí (2) *tương đương với định lí đảo* của (1) mà ta đã giải ở bài 13:

(3) Nếu $PQ = \frac{CD + AB}{2}$ thì ABCD là hình thang.

• VỀ ĐỊNH LÍ THUẬN VÀ ĐẢO

Khi học toán, các bạn nên tập thành thói quen là xem xét mệnh đề đảo của một định lí, xem xét mệnh đề đảo *sau khi đã giải được một bài toán, rồi tìm cách chứng minh hay bác bỏ mệnh đề đảo đó (đó là một mặt của thói quen* lật ngược vấn đề*).*

***a)** Như ta đã biết, mọi mệnh đề toán học có thể đưa về dạng:*

$$A \Rightarrow B \qquad (1)$$

(A là giả thiết, *B là* kết luận*)*

***Mệnh đề đảo** của (1) là:*

$$B \Rightarrow A \qquad (2)$$

***Dùng ký hiệu** $\bar{A}$* (không A) *và* $\bar{B}$ (không B), *ta có:*

$$A \Rightarrow B \qquad (1)$$

***tương đương** với*

$$\bar{B} \Rightarrow \bar{A} \qquad (3)$$

***Hai mệnh đề** (1) và (3)* luôn cùng đúng hoặc cùng sai; *nếu đã chứng minh được (3) tức là đã chứng minh được (1), còn nếu (3) mà sai thì (1) cũng sai. Do đó, muốn chứng minh (1) ta có thể chứng minh (3) và muốn chứng minh*

$$B \Rightarrow A \qquad (2)$$

ta có thể chứng minh

$$\bar{A} \Rightarrow \bar{B} \qquad (4)$$

***Người** ta gọi:*

(1) và (2) là các mệnh đề đảo của nhau *(có thể lấy một mệnh đề là* thuận, *mệnh đề kia là* đảo *của nó).*

(1) và (4) là các mệnh đề phản của nhau.

(1) và (3), cũng như (2) và (4), là các mệnh đề phản đảo của nhau. *Trong chứng minh và giải toán,* một mệnh đề có thể thay thế bằng mệnh đề phản đảo của nó *(tương đương với nó).*

b) *Khi có $A \Rightarrow B$ ta nói* A kéo theo *(suy ra)* B

A là đủ để B

A chỉ khi B

Khi có $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ ta nói A là cần để B

$(B \Rightarrow A)$ A khi B

Khi có $A \Leftrightarrow B$ ta nói A kéo theo B và ngược lại

A là cần và đủ để B

A khi và chỉ khi B

c) *Để chứng minh mệnh đề đảo (phản) của một định lí, có thể dựa vào cách chứng minh định lí đó, có thể dựa vào* kết luận *của định lí đó và* chứng minh bằng phản chứng, *v.v... Trong nhiều trường hợp, chứng minh định lí đảo khó hơn chứng minh định lí thuận.*

Thí dụ: *Xét hai mệnh đề đảo của nhau:*

* Trong một tam giác cân, hai đường phân giác bằng nhau.

* Nếu một tam giác có hai đường phân giác bằng nhau thì tam giác đó là cân.

Mệnh đề thứ nhất rất dễ chứng minh; nhưng việc chứng minh mệnh đề đảo của nó là một bài toán rất khó đối với học sinh phổ thông.

d) *Cần phân biệt dấu $\Leftrightarrow$ với dấu $\underset{dn}{\Leftrightarrow}$*

$A \Leftrightarrow B$ *là một mệnh đề* có thể chứng minh được.

$A \underset{dn}{\Leftrightarrow} B$ *là một* định nghĩa mà ta thừa nhận *(và sử dụng vào việc chứng minh định lí, giải toán: thay A cho B, và ngược lại, thay B cho A).*

Bài 15

Cho tứ giác ABCD trong đó CD > AB. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng nếu

$$EF = \frac{CD - AB}{2}$$

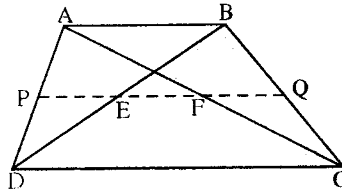
thì tứ giác ABCD là hình thang.

GIẢI

Gọi P là trung điểm của AD. Trong tam giác ADB thì PE là đường trung bình, do đó:

$$PE \parallel AB \text{ và } PE = \frac{1}{2}AB \quad (1)$$

Trong tam giác ACD thì PF là đường trung bình, do đó:



$$PF \parallel CD \text{ và } PF = \frac{1}{2}CD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) và giả thiết về EF, ta có:

$$PE + EF = \frac{AB}{2} + \frac{CD - AB}{2} = \frac{CD}{2} = PF$$

Đẳng thức PE + EF = PF chứng tỏ điểm E thuộc đoạn thẳng PF, do đó, từ (1) và (2), ta có AB // CD (đpcm).

NHẬN XÉT:

Ta có thể giải bài toán tương tự bài 14

Cho tứ giác lồi ABCD (với CD ≥ AB). Gọi E và F là trung điểm của hai đường chéo BD và AC. Chứng minh rằng:

$$EF \geq \frac{CD - AB}{2}$$

(dấu = xảy ra *khi và chỉ khi* AB // CD, tức ABCD là hình thang)

Gọi P là trung điểm của AD, ta có:

Khi P, E, F không thẳng hàng ($AB \nparallel CD$) thì trong tam giác PEF:

$$EF > PF - PE = \frac{DC - AB}{2}$$

Khi P, E, F thẳng hàng (AB // CD) thì:

$$EF = PF - PE = \frac{DC - AB}{2}$$

Như vậy, ta đã chứng minh được định lí về đường trung bình của hình thang cùng với định lí đảo của nó:

$$\text{ABCD là hình thang (AB // CD)} \Leftrightarrow EF = \frac{CD - AB}{2}$$

Bài 16

Cho hình thang ABCD (AB // CD) trong đó đáy CD bằng tổng của hai cạnh bên BC và AD. Chứng minh rằng hai đường phân giác của góc A và B cắt nhau tại một điểm K thuộc đáy CD của hình thang.

GỢI Ý:

Đối với bài toán này, ta có thể xây dựng bài giải xuất phát từ một trong

các định hướng sau:

1. Kẻ phân giác góc A, phân giác này cắt đáy CD ở điểm K. Ta chứng minh K nằm trên phân giác góc B hay KB là đường phân giác của góc B.

2. Kẻ phân giác của các góc A và B, chúng cắt nhau ở K. Ta chứng minh K thuộc CD, hay chứng minh ba điểm C, K, D thẳng hàng.

3. Lấy điểm K thuộc CD sao cho KD = AD rồi chứng minh KA là phân giác của góc A; KB là phân giác của góc B.

Từ các xuất phát trên, ta có 3 cách giải:

GIẢI

Cách 1: Phân giác của góc A cắt đáy CD ở K. Ta chứng minh KB là phân giác của góc B.

Thật vậy, ta có:

$$\left.\begin{cases}\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{K_1} = \widehat{A_2} \text{ (so le trong)}\end{cases}\right\} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{K_1}$$

Vậy Δ ADK cân đỉnh D, cho ta AD = DK (1)

Kết hợp (1) với giả thiết CD = AD + BC

ta suy ra BC = CK

Nối KB, ta được Δ BCK cân, do đó $\widehat{K_2} = \widehat{B_2}$.

Ta cũng có $\widehat{K_2} = \widehat{B_1}$ (so le trong).

Vậy $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Tia BK nằm giữa hai tia BA và BC mà hợp với hai tia này những góc bằng nhau nên KB là phân giác của góc B.

Cách 2: Gọi K là giao điểm của hai đường phân giác của góc A và góc B. Ta chứng minh K thuộc CD bằng cách chứng minh ba điểm C, K, D thẳng hàng.

Ta dễ dàng chứng minh được:

KD // AB

KC // AB

Từ đây, sử dụng tiên đề Euclide ta có kết luận phải tìm.

Cách 3: Gọi K là điểm thuộc cạnh đáy CD, thỏa mãn điều kiện KD = AD. Ta chứng minh KA, KB lần lượt là các phân giác của góc A và góc B.

$K \in CD \Rightarrow \quad KC + KD = CD$

$AD + BC = CD$ (giả thiết)

$KD = AD$ (cách lấy điểm K)

Từ ba đẳng thức trên ta có KC = BC, Δ BCK cân đỉnh $\widehat{B}$ và $\widehat{K_2} = \widehat{B_2}$. Mặt khác $\widehat{K_2} = \widehat{B_1}$ (so le trong). Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

Vậy KB là phân giác của góc B.

Cũng chứng minh tương tự, ta có KA là phân giác của góc A.

NHẬN XÉT:

Qua 3 cách giải trên đây, ta nhận thấy bài toán đã cho có thể phát biểu dưới dạng khác:

1. Cho hình thang ABCD (AB // CD), trong đó đáy CD bằng tổng hai cạnh bên BC và AD. Gọi K là giao điểm của hai đường phân giác của góc A và B. Chứng minh ba điểm D, K, C thẳng hàng.

2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) trong đó đáy CD bằng tổng của hai cạnh bên BC và AD. Gọi K là điểm thuộc đáy CD sao cho KD = AD.

Chứng minh KA, KB là các phân giác của góc A, góc B.

3. Cho hình thang ABCD (AB // CD), trong đó đáy CD bằng tổng hai cạnh bên BC và AD. Gọi K là giao điểm của đường phân giác của góc A với cạnh đáy. Chứng minh KB là phân giác của góc B.

4. Chứng minh rằng trong hình thang ABCD nếu các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh đáy DC thì ta có hệ thức

$$CD = CB + DA$$

5. Điều kiện cần và đủ để các tia phân giác của các góc A và B của hình thang ABCD (AB // CD) cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh đáy CD là hệ thức sau đây được thỏa mãn:

$$CD = CB + DA.$$

Bài 17

Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D}$ = 1v và CD = 2AB = 2AD. Lấy một điểm M thuộc đáy nhỏ AB và kẻ đường thẳng Mx vuông góc với DM; Mx cắt cạnh BC tại N. Chứng minh rằng tam giác DMN là tam giác vuông cân.

GIẢI

Để chứng minh Δ DMN cân, ta chỉ cần chứng minh rằng nó có một đường trung tuyến vừa là đường cao. Do vậy, ta để ý đến trung điểm I của đoạn thẳng DN và sẽ chứng minh MI ⊥ DN.

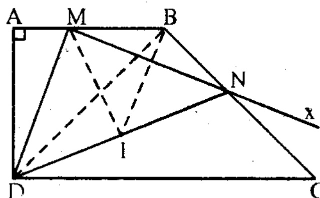
Từ các giả thiết AB // CD và CD = 2AB = 2AD ta suy ra được các điều sau:

* AB = AD ⇒ Δ DAB vuông cân ⇒ $\widehat{ABD} = 45^o$.

* K là trung điểm của DC ⇒ BK = DK = KC.

⇒ Δ DBC vuông tại B ⇒ DB ⊥ BC ⇒ $\widehat{DBC} = 90^o$.

* Kết quả là ta có $\widehat{ABC} = 135^o$.



Trong tam giác vuông DMN, MI là trung tuyến: $MI = \frac{1}{2}DN$.

Trong tam giác vuông DBN, BI là trung tuyến: $BI = \frac{1}{2}DN$.

Từ đó ta suy ra:

$$IM = IB = ID = IN$$

$$\Delta\ MIB \text{ cân} \Rightarrow \widehat{IMB} = \widehat{MBI} \qquad (1)$$

$$\Delta\ NIB \text{ cân} \Rightarrow \widehat{INB} = \widehat{NBI} \qquad (2)$$

Tổng các góc trong của tứ giác MBNI bằng 360°:

$$\widehat{MIN} + \widehat{INB} + \widehat{NBM} + \widehat{BMI} = 360^\circ.$$

Do (1) và (2) ta có:

$$\widehat{MIN} + 2\,\widehat{MBN} = \widehat{MIN} = 2\,\widehat{ABC} = \widehat{MIN} + 270^\circ = 360^\circ$$

$$\widehat{MIN} = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ.$$

Vậy Δ DMN là tam giác vuông cân.

Bài 18

Cho hình thang ABCD (không có góc nào vuông), các đường chéo cắt nhau tại P, các cạnh bên kéo dài cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng:

a) Nếu ABCD là hình thang cân thì PQ vuông góc với hai đáy.

b) Đảo lại, nếu PQ vuông góc với hai đáy thì ABCD là hình thang cân.

GIẢI

a) Có thể chứng minh dễ dàng.

b) Chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử QP vuông góc với CD và ABCD không phải là hình thang cân.

Suy ra rằng QCD không phải là tam giác cân. Giả sử QC > QD. Ta dựng tam giác cân QCD' và kéo dài BA, cắt QD' ở A'. Hình thang A'BCD' là hình thang cân, và theo câu a) thì QP' vuông góc với CD' (P' là giao điểm của hai đường chéo của A'BCD'). Theo giả thiết, PQ ⊥ CD. Như vậy, từ điểm Q ta dựng được hai đường thẳng QP và QP' cùng vuông góc với đường thẳng CD. Điều này vô lí. Vậy ABCD là hình thang cân.

Bài 19

Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh bên AD, BC và của các đường chéo AC, BD.

1. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

2. Cho các cạnh đáy hình thang AB = a, CD = b. (a > b).

Tính MN và PQ.

3. Tìm mối liên hệ giữa a, b để có

MN = 3PQ = QN.

GỢI Ý

2. $MN = \frac{a+b}{2}$, $PQ = \frac{a-b}{2}$

3. Hệ thức cần tìm: a = 2b.

Bài 20

Cho tam giác đều ABC. Từ một điểm M thuộc miền trong của tam giác ta kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D, đường thẳng song song với AC cắt BC ở E và đường thẳng song song với AB cắt AC tại F.

1. Chứng minh các tứ giác BDME, CFME, ADMF là các hình thang cân.

2. Chứng minh $\widehat{DME} = \widehat{EMF} = \widehat{FMD}$

3. Chứng minh rằng chu vi của tam giác DEF bằng tổng các khoảng cách từ điểm M đến các đỉnh, từ đây suy ra rằng chu vi của tam giác DEF nhỏ hơn chu vi của tam giác ABC nhưng lớn hơn $\frac{1}{2}$ chu vi của tam giác ABC.

4. Điểm M phải ở vị trí nào để tam giác DEF là tam giác đều. Trong trường hợp này, tính chu vi của tam giác DEF theo chiều cao AH của tam giác ABC.

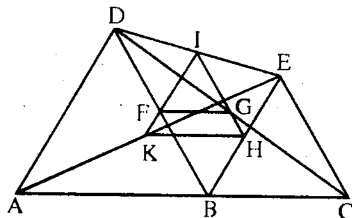
Bài 21

Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự ấy cùng nằm trên một đường thẳng Δ. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng Δ, ta dựng các tam giác đều ADB, BEC; gọi F, G, H, K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BD, DC, EB, EA.

1. Chứng minh các đường thẳng KF, HG cắt nhau tại trung điểm I của đoạn thẳng DE và tam giác KIH là tam giác đều.

2. Chứng minh tứ giác FGKH là hình thang cân.

GỢI Ý



1. Ta có

IF // EB

IK // AD

mà EB // AD

Kết hợp với tiên đề Euclide, suy ra ba điểm I, F, K thẳng hàng hay KF đi qua I.

Chứng minh tương tự, ta có HG đi qua I.

Ta dễ dàng thấy KH // AB

Kết hợp với HI // EC suy ra $\widehat{IHK} = 60^\circ$

Tương tự, ta có $\widehat{HKI} = 60^\circ$, suy ra đpcm.

2. Hãy chứng minh KH // FG và $\widehat{FKH} = \widehat{GHK}$.

Bài 22

Cho tứ giác lồi bất kì. Chứng minh rằng ta có thể dựng một hình thang có các cạnh bằng các cạnh của tứ giác đó.

GỢI Ý

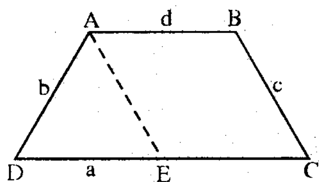
Giả sử có một tứ giác bất kì, các cạnh là a, b, c, d; ta có thể giả thiết $d \le c \le b \le a$.

Dựng hình thang ABCD với bốn cạnh có độ dài a, b, c, d như sau:

– Dựng tam giác ADE biết ba cạnh AD = b, AE = c, DE = a – d.

– Trên DE, lấy điểm C sao cho DC = a.

– Qua A dựng tia Ax // DC và nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AD có chứa tia DC. Trên Ax lấy điểm B sao cho AB = d.



– Nối BC.

Tứ giác ABCD theo cách dựng trên đây và có AB = d, BC = c, CD = a, AD = b, đồng thời AB // CD nên tứ giác ABCD là hình thang cần dựng.

CHÚ Ý:

Muốn dựng được hình thang ABCD, ta phải dựng được tam giác ADE. Điều kiện để dựng được tam giác ADE là:

$AD - AE < DE < AD + AE \Rightarrow b - c < a - d < b + c$ (1)

$|DE - AE| < AD < DE + AE \Rightarrow |a - d - c| < b < a - d + c$ (2)

$|DE - AD| < AE < DE + AD \Rightarrow |a - d - b| < c < a - d + b$ (3)

Dễ thấy các bất đẳng thức (1); (2), (3) luôn được thỏa mãn. Vậy bài toán của ta luôn có nghiệm.

Bài 23

Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn AD. Kẻ CH ⊥ AD.

1. Tính độ dài các đoạn thẳng AH, DH theo các cạnh đáy

2. Từ kết quả trên, suy ra mệnh đề:

"Trong một hình thang cân, đường chéo lớn hơn đường trung bình".

3. Đường thẳng AB cắt đường thẳng DC tại điểm O; M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh bên AB, CD. Hãy so sánh chu vi của các tam giác OAC, OMN.

4. Sử dụng kết quả trên để tìm tam giác có chu vi nhỏ nhất trong các tam giác có một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh có tổng độ dài là một số không đổi.

NHỮNG BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

Các bài toán sau đây mới chỉ có giả thiết được cho dưới dạng:

– Viết thành lời

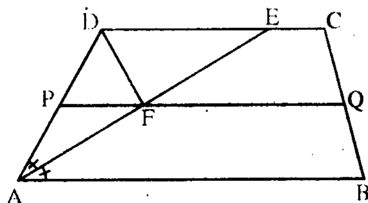
– Thể hiện qua hình vẽ.

Các bạn căn cứ trên giả thiết để đề ra các kết luận và hãy chứng minh những điều mà bạn tin là đúng.

Bài 24

Cho tam giác ABC, AB > AC. Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A và M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC.

Bài 25



Cho hình thang ABCD và các thông tin khác được thể hiện trên hình vẽ bên.

Hãy đề ra các kết luận có thể có và chứng minh các kết luận ấy.

Chú ý quan trọng

1. Đối với những bài toán có giả thiết cho bằng lời thì nên vẽ hình cẩn thận, chính xác; tránh vẽ các hình trong các trường hợp đặc biệt.

2. Đối với những bài toán có giả thiết được thể hiện qua hình vẽ thì nên tóm tắt các giả thiết qua lời văn, bằng các kí hiệu.

3. Hãy quan sát thật kĩ các hình vẽ. Nhiều khi các hình vẽ gợi cho ta những kết luận

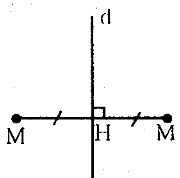
Cần cảnh giác, đôi khi chúng ta bị trực giác đánh lừa.

§3. ĐỐI XỨNG TRỤC

1. Hình đối xứng qua một đường thẳng

Định nghĩa 1

Hai điểm M và M' đối xứng với nhau qua đường thẳng d $\underset{dn}{\Leftrightarrow}$ d là trung trực của đoạn thẳng MM' (d $\perp$ MM', HM = HM')



Định nghĩa 2

Hai hình F và F' đối xứng với nhau qua đường thẳng d	$\underset{đn}{\Leftrightarrow}$	mỗi điểm thuộc F' có điểm đối xứng qua d thuộc F và ngược lại.

Định lí về hình đối xứng của một đoạn thẳng

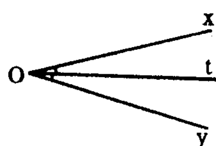
A' đối xứng với A B' đối xứng B qua d	$\Rightarrow$	A'B' = AB A'B' đối xứng với AB qua d

2. Trục đối xứng của một hình

Định nghĩa 3

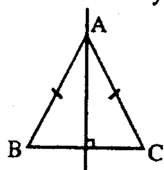
Đường thẳng d là trục đối xứng của hình F	$\underset{đn}{\Leftrightarrow}$	mỗi điểm thuộc F có điểm đối xứng qua d cũng thuộc F.

Định lí về trục đối xứng của một số hình

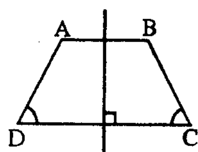


a) Một góc có trục đối xứng là đường phân giác của góc ấy.

b) Một đoạn thẳng có trục đối xứng là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.



c) Một tam giác cân có trục đối xứng là đường trung trực (cũng là đường cao) thuộc cạnh đáy.



d) Một hình thang cân có trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm của hai đáy.

● *Để chỉ điểm M' là đối xứng với điểm M qua đường thẳng d, người ta thường dùng ký hiệu:*

$$M' = S_d(M)$$

đọc: M' là đối xứng của M qua d.

Các định nghĩa và định lý ở trên có thể viết dưới dạng:

Định nghĩa 1

$$M' = S_d(M) \underset{đn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} d \perp MM' (\text{tại } H) \\ HM = HM' \end{cases}$$

Định nghĩa 2

$$F' = S_d(F) \underset{đn}{\Leftrightarrow} (M \in F \Leftrightarrow M' = S_d(M) \in F')$$

Định nghĩa 3

Hình F có trục đối xứng d $\underset{đn}{\Leftrightarrow} F = S_d(F)$

Định lý về hình đối xứng của một đoạn thẳng

$$\begin{cases} A' = S_d(A) \\ B' = S_d(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = AB \\ A'B' = S_d(AB) \end{cases}$$

Bài 26

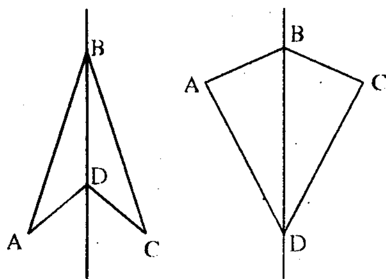
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai, vì sao? Nếu sai thì có thể sửa thế nào để thành đúng.

a) Nếu một tam giác có trục đối xứng thì đó là tam giác cân.

b) Nếu một tứ giác có trục đối xứng thì đó là hình thang cân.

GIẢI

Mệnh đề a) đúng. Tam giác ABC có trục đối xứng d tức là (theo định nghĩa) hình đối xứng của ABC qua d cũng chính là ABC. d phải qua một đỉnh của tam giác đồng thời d lại phải là trung trực của cạnh đối diện với đỉnh đó. Vì vậy, ABC phải là tam giác cân.



Mệnh đề b) sai. Hình vẽ cho ta thí dụ về hai tứ giác (không lồi và lồi) có trục đối xứng mà không phải là hình thang cân. Các hình này đều có trục đối xứng đi qua đỉnh của tứ giác.

Có thể thấy dễ dàng rằng: nếu một *hình thang* có trục đối xứng thì đó là hình thang cân.

Vì vậy, có thể phát biểu hai định lý sau đây:

> *Một hình tam giác có trục đối xứng* khi và chỉ khi *nó là tam giác cân.*
>
> *Một hình thang có trục đối xứng* khi và chỉ khi *nó là hình thang cân.*

Có thể nói rằng:

"Hình tứ giác là một hình thang cân khi và chỉ khi nó có trục đối xứng *không đi qua đỉnh* của nó".

Bài 27

Cho hai điểm A, B nằm về cùng một phía đối với đường thẳng p. Tìm trên p một điểm P sao cho tổng các độ dài AP + PB bé nhất.

GỢI Ý

Nếu A, B khác phía đối với p thì đường đi từ A đến B ngắn nhất là đoạn thẳng AB. Do vậy, ta tìm cách đưa bài toán về trường hợp này.

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua p. Nối đoạn thẳng AB', cắt p tại điểm P. Ta chỉ rõ rằng trong các điểm trên p, thì điểm P có tổng các khoảng cách PA + PB nhỏ nhất.

Bài 28

Cho góc nhọn xOy và một điểm P ở trong góc đó. Hãy tìm trên cạnh Ox một điểm A và trên cạnh Oy một điểm B sao cho chu vi tam giác PAB nhỏ nhất.

GIẢI

Gọi Q là điểm đối xứng của P qua Ox.

R là điểm đối xứng của P qua Oy.

Đường thẳng QR cắt Ox tại A và cắt Oy tại B. Ta chứng minh tam giác PAB có chu vi nhỏ nhất.

Thật vậy, giả sử A' là điểm tùy ý trên Ox khác với A và B' là điểm tùy ý trên Oy. Vì Ox, Oy là trục đối xứng tương ứng của PQ và PR nên ta có các đẳng thức:

$$PA = QA \quad (1)$$

$$PB = RB \quad (2)$$

$$PA' = QA' \quad (3)$$

$$PB' = RB' \quad (4)$$

Từ (1) và (2) suy ra chu vi Δ PAB là:

$$p = PA + AB + PB$$

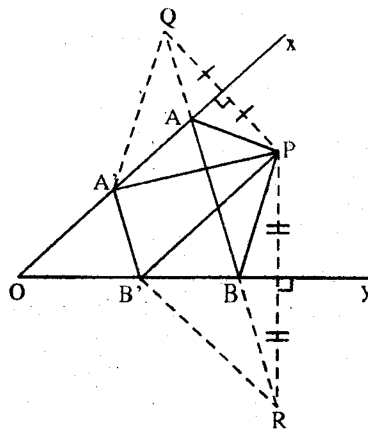
$$= QA + AB + BR$$

$$= QR \quad (5)$$

Từ (3) và (4) suy ra chu vi Δ PA'B' là:

$$p' = PA' + A'B' + PB'$$

$$= QA' + A'B' + B'R \quad (6)$$



Trong tứ giác QA'B'R rõ ràng là:

QA' + A'B' + B'R > QR (7)

Từ (5), (6), (7) ta có p' > p, đpcm.

CHÚ Ý:

Vì sao trong giả thiết của bài toán, góc xOy là nhọn? Giả thiết này được sử dụng ở đâu trong lời giải ở trên? Nếu xOy không nhọn thì sao?

Bài toán trên đây có thể mở rộng như sau:

Cho hai điểm P và Q nằm trong góc xOy. Hãy tìm trên Ox điểm A và trên Oy điểm B sao cho chu vi tứ giác PABQ nhỏ nhất.

Bài 29

Cho một góc nhọn xOy và một đường thẳng d cắt Ox tại I, cắt Oy tại J; A và B là hai điểm thuộc đoạn thẳng IJ. Tìm một điểm M trên Ox và một điểm N trên Oy sao cho tổng

MA + MN + NB nhỏ nhất

Bài 30

Cho một đường thẳng d và hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d (AB không song song với d); M là một điểm bất kì thuộc đường thẳng d.

Chứng minh rằng giao điểm của các đường trung trực của các đoạn thẳng MA, MB nằm trên một đường thẳng cố định không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên d.

Bài 31

Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A. Kẻ đường cao AH, D và E theo thứ tự là hình đối xứng của H qua các đường thẳng AB, AC. Chứng minh:

1. Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

2. Tứ giác BCED là hình thang vuông.

3. $\widehat{DHE} = 90^\circ$

4. DE = 2AH.

Bài 32

Cho góc nhọn xOy và một điểm M nào đó. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình đối xứng của điểm M qua các cạnh Ox, Oy và I là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2; Oz là tia phân giác của góc xOy.

1. Chứng minh hai điểm M_1 và M_2 đối xứng với nhau qua đường thẳng OI.

2. Cho $\widehat{xOy} = \alpha$. Tính góc $\widehat{M_1OM_2}$

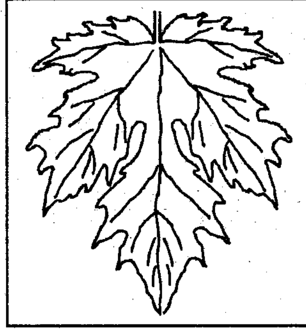
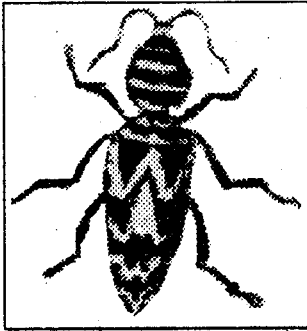
3. Chứng minh hai tia OM, OI đối xứng với nhau qua tia Oz.

4. Việc điểm M thuộc miền trong hoặc miền ngoài của góc xOy có ảnh hưởng gì đến các kết luận trên đây hay không?

• PHÉP ĐỐI XỨNG TRONG THIÊN NHIÊN

Quan sát một cách chăm chú, ta sẽ nhận ra rằng trong thiên nhiên, trong đời sống xung quanh ta, có nhiều hình dáng với những nét đẹp hài hòa, cân đối và dường như chúng được sinh ra trong một trật tự khoa học, chặt chẽ. Quả vậy những nét đẹp kì diệu mà thiên nhiên tạo ra trong vũ trụ đều tuân theo các quy luật toán học mà một trong những quy luật được thiên nhiên sử dụng phổ biến nhất là phép đối xứng trục.

Bạn hãy nhìn kĩ mà xem, một cành cây, một chiếc lá, một con côn trùng, một khuôn mặt v.v..., và vô vàn các hình dạng tự nhiên khác từ các tinh thể kim cương đến cơ thể con người đều mang tính đối xứng chặt chẽ. Tính đối xứng không chỉ tạo ra vẻ đẹp bên ngoài mà còn có ý nghĩa quyết định đối với sự tồn tại và phát triển của sinh vật. Cơ thể con người và động vật mang tính đối xứng giúp cho nó hoạt động một


cách dễ dàng và hiệu quả hơn. Nhà nhân loại học Randy Thormil đã khám phá ra rằng những cơ thể đối xứng không những đẹp hơn, khỏe mạnh hơn mà còn ít mắc một số bệnh nào đó.

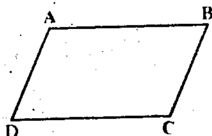
Con người từ xa xưa đã bắt chước thiên nhiên sử dụng tính đối xứng trong hoạt động của mình, từ việc xây dựng các lâu đài nguy nga tráng lệ cho đến cả việc chế tạo những dụng cụ lao động nhỏ bé. Điều thú vị là không chỉ có con người mới biết bắt chước thiên nhiên mà ngay cả con kiến đào hang, con ong xây tổ, con nhện chăng tơ cũng biết vận

dụng phép đối xứng. Ở một đôi loài sự bắt chước còn có vẻ thông minh, tài tình như một loài nhện Phi châu mà người ta phải gọi nó bằng một cái tên rất toán học: "Nhện Hình học".

§4. HÌNH BÌNH HÀNH

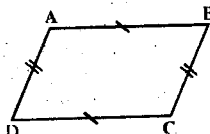
1. Định nghĩa

Hình bình hành là tứ giác có hai cặp cạnh đối song song.



(Hình bình hành là hình thang có hai cạnh bên song song)

2. Định lí



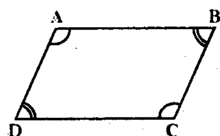
1. ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \end{cases}$

2. AB //= CD ⇒ ABCD là hình bình hành

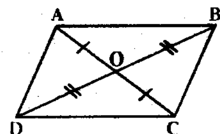
(hoặc AD //= BC)

(AB //= CD có nghĩa là AB // CD và AB = CD).



3. ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{C} \\ \widehat{B} = \widehat{D} \end{cases}$



4. ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow \begin{cases} AO = OC \\ BO = OD \end{cases}$

3. Dấu hiệu nhận biết hình bình hành

Để chứng minh một tứ giác là hình bình hành, ta có thể chứng minh tứ giác có một trong các tính chất sau:

1. Các cạnh đối song song;
2. Các cạnh đối (hay các góc đối) bằng nhau;
3. Một cặp cạnh đối song song và bằng nhau;
4. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Bài 33

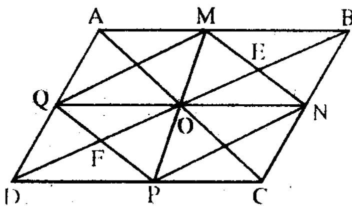
Chứng minh rằng:

a) Trong hình bình hành, giao điểm các đường chéo trùng với giao điểm các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện;

b) Đảo lại, nếu một tứ giác có giao điểm các đường chéo trùng với giao điểm các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện thì tứ giác đó là hình bình hành.

GIẢI

Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.



a) Ta chứng minh rằng nếu ABCD là hình bình hành thì O cũng là giao điểm của MP và NQ.

Thật vậy, ABCD là hình bình hành:

AB //= CD ⇒ AM //= PC ⇒ AMCP là hình bình hành.

Do đó, đường chéo MP đi qua trung điểm O của đường chéo AC.

Tương tự như vậy, ta có AQCN là hình bình hành nên QN đi qua trung điểm O của AC.

Tóm lại, AC, BD, MP, QN đều đi qua O (đpcm).

b) *Đảo lại*, ta chứng minh rằng nếu O cũng là giao điểm của NQ và MP thì ABCD là hình bình hành.

Thật vậy, tứ giác MNPQ là hình bình hành vì MN //= PQ (MN và PQ cùng song song với AC và bằng $\frac{AC}{2}$).

Do đó MO = OP và QO = ON.

Gọi E, F là giao điểm của BD với MN và PQ. Ta có:

$$\Delta\ OME = \Delta\ OPF\ (g.c.g) \Rightarrow OE = OF$$

Mà $OE = \frac{OB}{2}$ (do AM = MB và ME // AO), $OF = \frac{OD}{2}$, do đó OB = OD.

Chứng minh tương tự, ta có thêm OA = OC, nghĩa là ABCD có các đường chéo giao nhau tại trung điểm của mỗi đường. Do đó ABCD là hình bình hành (đpcm).

Bài 34

Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi P, Q là trung điểm của các cạnh AB, CD và M, N là trung điểm của các đường chéo AC, BD.

Chứng minh các đoạn thẳng MN và PQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

GỢI Ý:

Dễ thấy

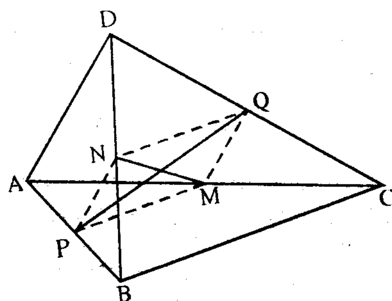
PN // AD và $PN = \frac{1}{2}AD$ (1)

QM // AD và $QM = \frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

QM // PN và QM = PN

Vậy tứ giác PNQM là hình bình hành nên hai đường chéo PQ, MN cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



NHẬN XÉT:

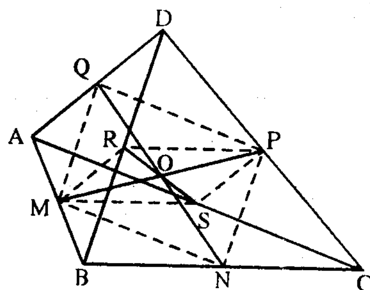
Bài toán này có giả thiết trùng với một phần của các giả thiết của các bài toán 8, 9, 10, 11 của §1. Liệu có thể sử dụng kết quả bài này vào việc đơn giản cách chứng minh các bài 8, 9, 10, 11 chăng?

Bài 35

Định lí Gergonne (*)

Trong một tứ giác lồi, các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối diện và đoạn thẳng nối trung điểm của các đường chéo đồng quy tại một điểm.

GỢI Ý



Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, BD và AC.

Tứ giác MNPQ là hình bình hành vì MN // PQ và MN = PQ (do MN // AC // PQ và $MN = PQ = \frac{AC}{2}$). Hai đường chéo MP và QN của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

(*) J.D Gergonne (1771 – 1859): Sĩ quan pháo binh và là nhà toán học Pháp.

Tứ giác RQSN cũng là hình bình hành vì RQ // SN và RQ = SN (do RQ // AB // SN và RQ = SN = $\frac{AB}{2}$). Đường chéo RS đi qua trung điểm O của đường chéo QN.

Như vậy, ba đoạn thẳng MP, QN và RS đều đi qua O (đpcm).

CHÚ Ý:

1. Trên đây, ta đã chứng minh rằng hai đoạn thẳng MP và NQ, nối trung điểm các cạnh đối diện của tứ giác bao giờ cũng cắt nhau tại một điểm O nằm trên đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo.

Ta biết rằng R ≡ S (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường) khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình bình hành.

Mà R ≡ S ≡ O có nghĩa là hai đoạn thẳng MP, QN và hai đường chéo của tứ giác giao nhau tại một điểm O. Như vậy, ta đa giải được bài 35 như là một *trường hợp đặc biệt* của bài 36 này (hay là: bài 36 *tổng quát hơn* bài 35).

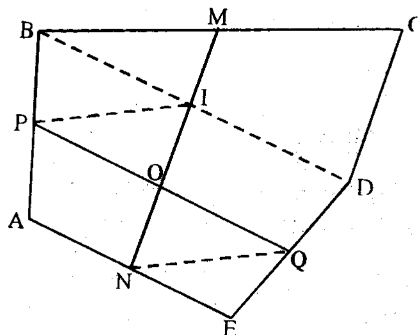
2. Điểm O trên đây cũng thường được gọi là điểm Gergonne của tứ giác.

Bài 36

Cho ngũ giác ABCDE. Gọi M, P, N, Q lần lượt là trung điểm của CB, BA, AE, ED. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để MN // DC là đường thẳng MN đi qua trung điểm của PQ.

GIẢI

a) Điều kiện cần: Nếu MN // DC thì MN đi qua trung điểm của PQ.



Chứng minh: Gọi I là giao điểm của DB và MN. Trong Δ BCD đường MN song song với đáy CD và đi qua trung điểm M của

cạnh bên nên qua trung điểm I của cạnh kia, nghĩa là BI = ID.

Từ đó suy ra PI và NQ là những đường trung bình của các tam giác ABD và AED. Ta có:

$$PI \parallel AD \text{ và } PI = \frac{AD}{2} \quad (1)$$

$$NQ \parallel AD \text{ và } NQ = \frac{AD}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra PI // NQ và PI = NQ hay PIQN là hình bình hành, do đó các đường chéo PQ và NI cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Nói cách khác, MN đi qua trung điểm của PQ (đpcm).

b) Điều kiện đủ: Nếu MN đi qua trung điểm của PQ thì MN // DC.

Chứng minh: Gọi O là giao điểm của PQ và MN. Ta có giả thiết PO = OQ.

Gọi I là giao điểm của MN và DB, I' là trung điểm của DB.

Ta có PI'QN là hình bình hành (vì PI' // NQ và PI' = NQ = $\frac{AD}{2}$)

Suy ra I'N đi qua O. Vì IN và I'N cùng đi qua O nên I'N trùng với IN hay I' trùng với I hay BI = ID.

MI là đường trung bình trong tam giác BCD nên MI // CD.

Suy ra MN // DC (đpcm).

Bài 37

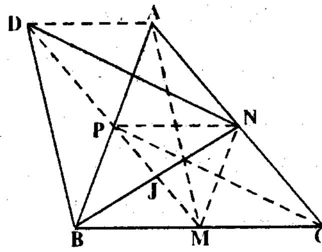
Cho hai tam giác ABC và DEF. Chứng minh rằng nếu các cạnh của tam giác DEF lần lượt song song và bằng các trung tuyến của tam giác ABC thì các cạnh của tam giác ABC lần lượt song song và bằng $\frac{4}{3}$ các trung tuyến của tam giác DEF.

GỢI Ý:

Trong giả thiết của bài toán có các đoạn thẳng song song và bằng nhau. Vậy có thể sử dụng các kiến thức về hình bình hành để giải bài toán này.

Có thể chia lời giải thành ba bước.

1. Gọi AM, BN, CP là ba trung tuyến của tam giác ABC. Qua N kẻ đường thẳng song song với CP và lấy trên đó điểm D sao cho ND = CP (D và P cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng CN). Từ kết quả CNDP là hình bình hành, ta chứng minh được AMBD cũng là hình bình hành, cho ta DB = AM.



Như vậy, tam giác BND là tam giác thỏa mãn điều kiện đầu bài, nghĩa là nó có ba cạnh DB, BN, ND lần lượt song song và bằng các trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC.

2. Dễ thấy ACMD là hình bình hành, suy ra AC // DM. Gọi J là giao điểm của DM và BN, ta cũng có AC // DJ (1)

PNMB là hình bình hành, cho ta J là trung điểm của BN hay DJ là trung tuyến của tam giác BND. Vậy cạnh AC của tam giác ABC song song với trung tuyến DJ của tam giác BND.

Với các cạnh còn lại, chứng minh tương tự.

3. ACMD là hình bình hành $\Rightarrow$ AC = DM.

PNMB là hình bình hành $\Rightarrow PJ = JM = \frac{1}{2}PM$.

Từ đây suy ra $DM = \frac{4}{3}DJ$ và $AC = \frac{4}{3}DJ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra cạnh AC của tam giác ABC song song và bằng $\frac{4}{3}$ trung tuyến DJ của tam giác BND.

Với các cạnh còn lại cũng chứng minh tương tự.

Bài 38

Cho hình bình hành ABCD.

E là một điểm thuộc đoạn thẳng AB, BE $= \frac{1}{3}$BA

F là một điểm thuộc đoạn thẳng DC, DF $= \frac{1}{3}$DC.

1. Chứng minh tâm O của hình bình hành là trung điểm của EF.

2. Gọi G, H theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BC, AD.

Chứng minh HF = FE = EG.

3. Chứng minh trung điểm J của AG thẳng hàng với điểm C và điểm E.

4. Hình bình hành phải có tính chất gì để $\widehat{GAC} = 90°$

5. Gọi I là trung điểm của AE. Chứng minh IF // BC.

Bài 39

Trong hình bình hành ABCD, ta lấy trung điểm M và N của hai cạnh BC và CD tương ứng. Có thể nào các tia AM và AN chia góc BAD ra ba góc bằng nhau không?

(Đề thi Olympic toán toàn LB Nga, 1998, lớp 8, vòng I).

GỢI Ý:

Không thể có. Dùng phản chứng. Kẻ đường chéo BD, cắt AM và AN tại các điểm K và L tương ứng, có BK = KL = LD. Nếu AM và AN chia góc BAD ra ba góc bằng nhau thì từ A dựng được hai đường thẳng vuông góc với BD.

Bài 40

Cho hai địa điểm cố định A và B nằm cùng một phía một đường lộ thẳng xy. Người ta muốn chọn hai địa điểm M và N trên lộ sao cho đi từ A tới B qua hai điểm M, N với quãng đường ngắn nhất. Biết rằng M và N phải cách nhau một khoảng *l* không đổi.

GIẢI

a) *Phân tích*

Ta chọn tạm hai địa điểm M_1, N_1 trên xy và phân tích đường đi AM_1N_1B.

Ta lấy điểm B' đối xứng với B qua xy. Từ A ta dựng đoạn AA' // = M_1N_1 (A' và N_1 ở cùng phía đối với đường thẳng qua AM_1). Vì lý do đối xứng nên N_1B = NB'. Tứ giác $AA'N_1M_1$ là hình bình hành nên AA' = M_1N_1 và $AM_1 = A'N_1$. Do đó con đường xây dựng là AM_1N_1B có độ dài:

$$p = AM_1 + M_1N_1 + N_1B = AA' + A'N_1 + N_1B'$$
$$= l + A'N_1 + N_1B'.$$

p ngắn nhất khi $A'N_1 + N_1B'$ ngắn nhất, tức là lúc N_1 ở vị trí N, sao cho A', N, B' thẳng hàng. Do đó, ta có cách xác định M và N như sau:

b) *Cách dựng:*

1) Kẻ AA' // xy và AA' = l (A' và B ở cùng phía đối với đường thẳng qua A vuông góc với xy).

2) Lấy B' đối xứng với B qua xy.

3) Nối A'B' cắt xy tại N.

4) Từ N dựng đoạn NM = l để A'N và AM là cặp cạnh đối của một hình bình hành.

Đường đi AMNB thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

c) *Biện luận:*

Bài toán có một nghiệm hình.

Bài 41

Một con kênh hai bờ thẳng song song. Hai xã P và Q ở hai phía con kênh. Hai bên bàn nhau bắc một chiếc cầu qua con kênh và đắp đường để đi lại giữa P và Q. Hãy xác định xem vị trí cầu chỗ nào để đường đi từ P đến Q là *ngắn nhất.* Biết là cầu được xây dựng phải vuông góc với bờ kênh.

GIẢI

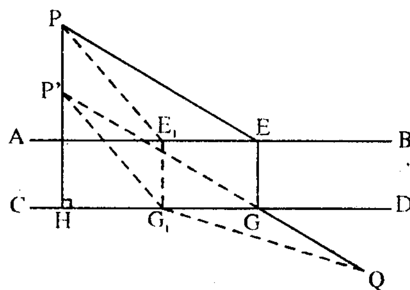
Giả sử chiếc cầu đặt ở vị trí $E_1G_1 = l$. (l là chiều rộng của kênh). Vậy chiều dài đường đi từ P đến Q sẽ là:

$$s = PE_1 + E_1G_1 + G_1Q$$

Kẻ PP' // = E_1G_1, ta có $PP'G_1E_1$ là hình bình hành.

Do đó $PE_1 = P'G_1$ và

$$s = PP' + P'G_1 + G_1Q = l + P'G_1 + G_1Q$$



nên s ngắn nhất khi $P'G_1 + G_1Q$ ngắn nhất, tức là lúc G_1 ở vị trí G để P', G, Q thẳng hàng. Từ đó ta có cách dựng như sau:

Cách dựng:

1) Kẻ PH ⊥ CD;

2) Lấy điểm P' thuộc đoạn PH sao cho PP' = l;

3) Nối P'Q cắt CD tại G;

4) Dựng đường vuông góc với CD tại G cắt AB tại E.

Dễ dàng chứng minh rằng EG là chiếc cầu cần xác định

Dưới đây ta có một bài toán tương tự.

Bài 42

Hai xã P và Q ở hai phía một con kênh có hai bờ thẳng song song. Hãy xây một cầu vuông góc với bờ kênh và đắp đường đi từ P qua cầu đến Q sao cho độ dài đường từ P đến chân cầu phía bên P cũng bằng đường từ chân cầu phía Q đến Q.

GỢI Ý:

Chân cầu bên phía Q cách đều P và Q.

Bài 43

Cho hình bình hành ABCD có góc $\widehat{A} = 120°$. Đường phân giác của góc D đi qua trung điểm của cạnh AB.

a) Chứng minh rằng AB = 2AD.

b) Gọi F là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng Δ ADF đều và Δ AFC cân.

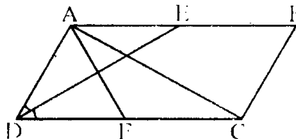
c) Chứng minh rằng AC vuông góc với AD.

GỢI Ý:

a) Gọi E là trung điểm của AB.

Hãy chứng minh Δ ADE cân.

b) Chứng minh Δ ADF cân và có một góc bằng 60°.



c) Hãy tính tổng hai góc ADC và ACD.

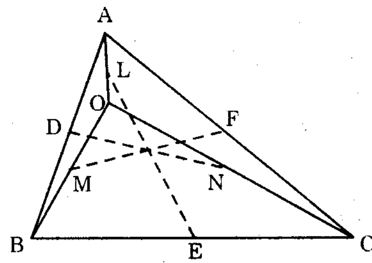
Bài 44

Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OA, OB, OC.

Chứng minh rằng các đoạn thẳng EL, FM và DN đồng quy.

GỢI Ý:

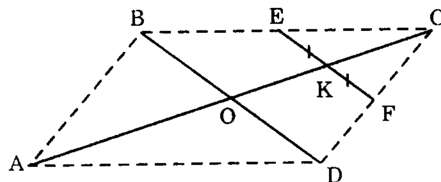
Chứng minh các tứ giác EFLM và NFDM là hình bình hành.



Bài 45

Một học sinh vẽ vào giấy nháp bằng bút chì một hình bình hành ABCD với các trung điểm E của cạnh BC và F của cạnh CD. Đáng lẽ tô bằng mực, em lại xóa mất nét bút chì nên hình vẽ chỉ còn lại ba điểm A, E, F. Làm cách nào để khôi phục lại hình vẽ ban đầu?

GIẢI (vắn tắt)



Giả sử hình bình hành ABCD đã được khôi phục. Kẻ đường chéo AC và gọi K là trung điểm EF. Ta dễ dàng chứng minh được $KC = \frac{1}{3}AK$.

Do vậy, ta có cách khôi phục hình bình hành ABCD từ ba điểm A, E, F, như sau:

– Nối EF và lấy trung điểm K của EF.

– Nối AK và kéo dài, lấy điểm C sao cho $KC = \frac{1}{3}AK$. Điểm C chính là đỉnh đối diện của đỉnh A.

Từ đây, ta dựng tiếp hai đỉnh B và D.

TÌM THÊM MỘT CÁCH CHỨNG MINH

Bài 46

Cho tam giác ABC. Qua A ta kẻ đường thẳng song song với BC, qua B kẻ đường thẳng song song với AC và qua C kẻ đường thẳng song song với AB. Ba đường thẳng này xác định một tam giác A'B'C'. (A ∈ B'C'; B ∈ C'A' và C ∈ A'B')

1. Chỉ rõ các hình bình hành có trên hình vẽ, từ đó suy ra A, B, C theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng B'C', C'A', A'B'.

2. Xác định quan hệ giữa B'C' với đường cao AH của tam giác ABC.

3. Xác định vai trò của các đường cao của tam giác ABC trong tam giác A'B'C'. Từ đây suy ra một cách chứng minh một định lí về các đường thẳng đồng quy trong tam giác.

Phát biểu định lí ấy và tóm tắt cách chứng minh "mới" mà bạn vừa tìm được.

NHỮNG BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

Bài 47

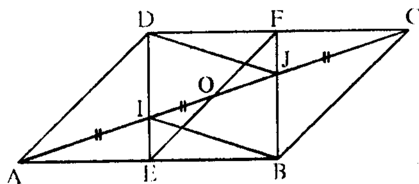
Cho tứ giác ABCD; E là trung điểm của cạnh AB, F là trung điểm của cạnh CD; M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AF, CE, BF và DE.

Bài 48

Cho tam giác ABC có trực tâm H và giao điểm của các đường trung trực là điểm O. Gọi P, Q, N, S, R theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AH, AC, HC, và BH.

Bài 49

Cho hình bình hành ABCD và các giả thiết:



– AI = IJ = JC

– O là tâm của hình bình hành

– BJ cắt DC ở F và DI cắt AB ở E.

§5. ĐỐI XỨNG TÂM

1. Hình đối xứng qua một điểm

Định nghĩa 1:

Hai điểm M và M' đối xứng với nhau qua điểm O $\underset{đn}{\Leftrightarrow}$ O là trung điểm của đoạn thẳng MM' $\left(OM = OM' = \dfrac{MM'}{2}\right)$

Định nghĩa 2:

Hai hình F và F' đối xứng với nhau qua điểm O $\underset{đn}{\Leftrightarrow}$ Mỗi điểm thuộc F đối xứng qua O với một điểm thuộc F' và ngược lại.

Định lí về hình đối xứng của một đoạn thẳng

* A' đối xứng với A

* B' đối xứng với B qua O $\Rightarrow \begin{cases} *A'B' = AB \\ *A'B' \text{ đối xứng với AB qua O} \end{cases}$

2. Tâm đối xứng của một hình

Định nghĩa 3:

Điểm O là tâm đối xứng của hình F $\underset{đn}{\Leftrightarrow}$ Mỗi điểm thuộc F có điểm đối xứng qua O cũng thuộc F

Định lí:

Hình bình hành có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo của nó.

Dùng kí hiệu

$$M' = S_o (M)$$

để chỉ: M' là điểm đối xứng của M qua tâm O, ta có thể viết các định nghĩa trên đây dưới dạng:

Định nghĩa 1:

$$M' = S_O(M) \underset{đn}{\Leftrightarrow} OM = OM' = \frac{MM'}{2}$$

Định nghĩa 2:

$$F' = S_O(F) \underset{đn}{\Leftrightarrow} (M \in F \Leftrightarrow M' = S_O(M) \in F')$$

Định nghĩa 3:

$$\text{Hình } F \text{ có tâm đối xứng } O \underset{đn}{\Leftrightarrow} F = S_o(F)$$

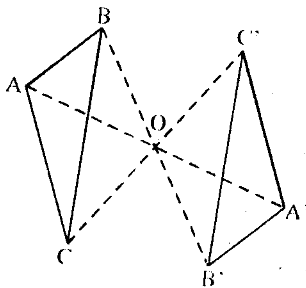
Bài 50

Chứng minh rằng nếu ba điểm A, B và C không thẳng hàng thì các điểm A', B' và C' đối xứng với chúng qua điểm O cũng không thẳng hàng.

GIẢI

Giả thiết A, B, C không thẳng hàng cho ta:

AC + AB > BC (1)



Mặt khác, vì A', B', C' là các điểm đối xứng của A, B, C qua tâm O, nên theo định lý §5, ta có:

AC = A'C'

AB = A'B'

BC = B'C'

Thay AC, AB và BC trong đẳng thức (1) bằng các đoạn thẳng bằng chúng, ta có:

$$A'C' + A'B' > B'C'.$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ điểm A' không thuộc đoạn B'C' hay ba điểm A', B', C' không thẳng hàng.

Bài 51

Cho hai đường thẳng phân biệt p và p'. Chứng minh rằng:

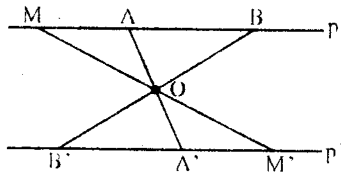
a) Nếu p // p' thì p và p' đối xứng tâm với nhau; tìm tâm đối xứng.

b) Nếu p và p' đối xứng với nhau qua một điểm O nào đó thì p // p'

GIẢI

a) Lấy hai điểm bất kì M và M': $M \in p$ và $M' \in p'$. Trung điểm O của MM' là tâm đối xứng của hai đường thẳng p và p' (p // p')

Chứng minh:



Lấy điểm bất kỳ $A \in p$. Đường thẳng AO cắt p' ở A'. Do MA // M'A' và OM = OM', ta dễ dàng suy ra rằng OA' = OA, nghĩa là $A' \in p'$ là điểm đối xứng của $A \in p$ qua O: $A' = S_0(A)$.

Ngược lại lấy $B' \in p'$, đường thẳng B'O cắt p ở B. Chứng minh tương tự như trên, ta có $B = S_0(B')$.

Như vậy, mọi điểm $A \in p$ đều có $A' = S_0(A) \in p'$ và ngược lại (đpcm).

Chú ý rằng p và p' (p // p') có vô số tâm đối xứng, đó là bất kì điểm O nào là trung điểm của MM', với $M \in p$ và $M' \in p'$.

b) Nếu *hai đường thẳng phân biệt* p và p' đối xứng với nhau qua O thì $O \notin p$ và $O \notin p'$. Lấy $A, B \in p$ và $A', B' \notin p'$; A' đối

xứng với A. B' đối xứng với B qua O. Ta có OA = OA', OB = OB'; nên tứ giác ABA'B' là hình bình hành, do đó: AB // A'B', tức p // p' (đpcm).

Bài 52

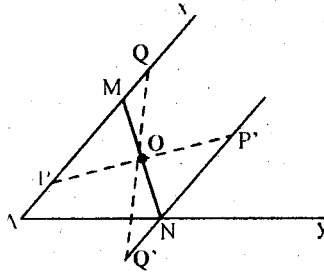
Cho góc xAy và O là một điểm trong của góc đó. Hãy dựng qua O đường thẳng cắt hai cạnh Ax, Ay theo thứ tự hai điểm M, N sao cho:

a) O là trung điểm của đoạn thẳng MN;

b) ON = 2.OM.

Trả lời:

a) Dựng đường thẳng đối xứng của Ax qua tâm O (bằng cách lấy hai điểm bất kỳ P, Q ∈ Ax, dựng P', Q' đối xứng với P, Q qua O; đường thẳng qua P'Q' đối xứng với P, Q qua O; đường thẳng qua P'Q' đối xứng với Ax qua O).



Đường thẳng P'Q' cắt Ay ở điểm N cần tìm.

b) Lấy OP' = 2.OP, OQ' = 2.OQ, đường thẳng P'Q' cắt Ay ở điểm N cần tìm.

Bài 53

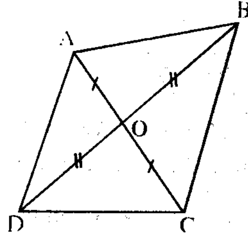
Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì tứ giác đó là hình bình hành.

GIẢI

Giả sử tứ giác ABCD có tâm đối xứng O.

Như vậy, hình đối xứng của một cạnh bất kỳ, cạnh AB chẳng hạn, phải là một cạnh của ABCD. Nhưng hai cạnh chung đỉnh như AB và AD không thể là đối xứng tâm với nhau được (vì nếu vậy

thì ba đỉnh A, B, D phải thẳng hàng). Do đó, cạnh AB phải đối xứng với cạnh CD qua tâm O. Do OA = OC, OB = OD, tứ giác ABCD là hình bình hành (đpcm).



CHÚ Ý: Mệnh đề ta vừa chứng minh là *mệnh đề đảo* của mệnh đề: *Hình bình hành nhận giao điểm của hai đường chéo làm tâm đối xứng.*

Gộp hai mệnh đề thuận, đảo lại ta có:

Hình tứ giác là hình bình hành *khi và chỉ khi* tứ giác có tâm đối xứng.

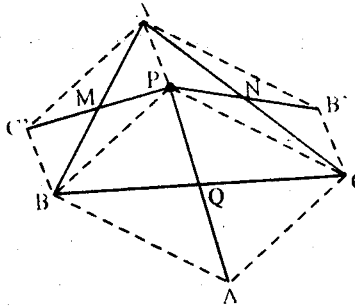
Bài 54

Cho tam giác ABC và P là một điểm trong của tam giác đó. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC. Gọi A', B', C' là những điểm đối xứng của P lần lượt qua Q, N và M.

a) Chứng minh AB'A'B là hình bình hành

b) Chứng minh AA', BB', CC' đồng quy.

GIẢI



a) Tứ giác PAB'C có PN = = NB' và AN = NC (theo giả thiết) nên nó là hình bình hành. Từ đó:

AB' //= PC (1)

Tương tự, tứ giác PBA'C là hình bình hành, do đó:

BA' //= PC (2)

Từ (1) và (2) có

$$AB' \mathbin{/\!\!/}= BA'.$$

Suy ra AB'A'B là hình bình hành.

b) Do AB'A'B là hình bình hành nên các đường chéo AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Ta chứng minh CC' đi qua giao điểm nói trên.

Thật vậy, tứ giác PAC'B là hình bình hành nên

$$PB \mathbin{/\!\!/}= AC' \qquad (3)$$

Tứ giác PBA'C là hình bình hành nên

$$PB \mathbin{/\!\!/}= A'C \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có: AC' //= A'C, suy ra AC'A'C là hình bình hành. Do đó đường chéo CC' đi qua trung điểm của đường chéo AA'. Vậy AA', BB', CC' đồng quy.

NHẬN XÉT CÁCH GIẢI: Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta chứng minh một đường đi qua giao điểm của hai đường kia.

Bài 55

Cho hình bình hành ABCD, điểm P trên AB, M và N là các trung điểm của các cạnh AD và BC. Gọi các điểm đối xứng của P qua M và N lần lượt là E và F.

a) Chứng minh rằng các điểm E, F thuộc đường thẳng CD.

b) Chứng minh rằng độ dài đoạn EF không phụ thuộc vào vị trí của điểm P trên AB.

GIẢI (vắn tắt)

$$\left.\begin{array}{r}MA = MD \Rightarrow \text{A đối xứng với D qua M}\\ \text{P đối xứng với E qua M}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{ED đối xứng với}\\ \text{AP qua M.}\end{array}$$

$\Rightarrow$ ED // AP

và ED = AP

ED // AP $\Rightarrow$ ED // AB

[redacted]

$\Rightarrow$ E $\in$ CD

Tương tự: FC // BP

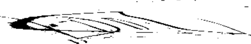
FC = BP

$\Rightarrow$ F $\in$ CD.

Suy ra: EF = 2CD.

Bài 56

[redacted]



Điểm E là trung điểm của DO.

Bài 57

Cho bốn tia Ox, Oz, Ot, Oy cùng xuất phát từ một điểm O. Tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Ot và tia Ot nằm giữa hai tia Oz, Oy. Trên tia Ox

[redacted]

$\Rightarrow$ ED // AP

và ED = AP

ED // AP $\Rightarrow$ ED // AB

Theo giả thiết: CD // AB

$\Rightarrow$ E $\in$ CD

Tương tự: FC // BP

FC = BP

$\Rightarrow$ F $\in$ CD.

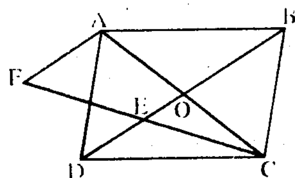
Suy ra: EF = 2CD.

Bài 56

Cho hình bình hành ABCD có tâm đối xứng O, một điểm E trên đoạn OD. Gọi F là điểm đối xứng của C qua E.

a) Chứng minh rằng AF // BD.

b) Điểm E ở vị trí nào trên OD để ODFA là hình bình hành?



GỢI Ý:

a) Chứng minh OE là đường trung bình trong Δ AFC.

b) Chú ý: Khi ODFA là hình bình hành thì AF = DO.

mà $EO = \frac{1}{2}AF$.

Điểm E là trung điểm của DO.

Bài 57

Cho bốn tia Ox, Oz, Ot, Oy cùng xuất phát từ một điểm O. Tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Ot và tia Ot nằm giữa hai tia Oz, Oy. Trên tia Ox

lấy một điểm A, trên tia Oy lấy điểm A' sao cho OA = OA'. Trên tia Oz lấy một điểm B, trên tia Ot lấy điểm B' sao cho OB = OB'. Gọi I là giao điểm của hai đoạn thẳng A'B và B'A.

a) Chứng minh rằng hai đoạn thẳng A'B' và AB đối xứng với nhau qua tâm I.

b) Chứng minh rằng hai đoạn thẳng A'B' và AB đối xứng với nhau qua đường thẳng OI.

Bài 58

Cho tam giác ABC; I là trung điểm của cạnh BC và A' là điểm đối xứng của A qua tâm I.

1. Chứng minh ABA'C là hình bình hành tâm I. Suy ra bất đẳng thức:

$$AA' < AB + AC.$$

2. Gọi J là trung điểm của AC và K là trung điểm của AB. Chứng minh

$$\frac{1}{2}(AB + AC + BC) < AI + BJ + CK < AB + AC + BC$$

Phát biểu kết quả thành một tính chất của tam giác.

LẠI THÊM MỘT CÁCH CHỨNG MINH

Bài 59

Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

M là điểm đối xứng của B qua điểm B'

N là điểm đối xứng của C qua điểm C'

P là điểm đối xứng của A qua điểm A'

1. Chứng minh rằng A, B, C theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng MN, NP, PM.

2. Gọi Δ_1, Δ_2, Δ_3 theo thứ tự là các đường trung trực của các đoạn thẳng MN, NP, PM.

Chứng minh Δ_1, Δ_2, Δ_3 là các đường cao của tam giác ABC.

3. Từ kết quả trên suy ra được định lí nào về các đường thẳng đồng quy trong tam giác?

Bài 60

Cho tam giác ABC. Gọi AB_1C_2, A_2BC_1, A_1B_2C là các hình đối xứng của tam giác ABC lần lượt qua các đỉnh A, B, C.

1. Chứng minh hình $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ có các cặp cạnh đối diện song song.

2. Tính chu vi hình $A_1A_2C_1C_2B_1B_2$ theo AB, BC, CA.

3. Chứng minh hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

GỢI Ý:

2. Chu vi $A_1A_2C_1C_2B_1B_2 = 3(AB + BC + CA)$.

CÁC BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

Bài 61

Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A; M, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi I, J lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các tâm E, F.

Bài 62

Cho tam giác ABC và các thông tin sau:

1. A', B', C' là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

2. M là trung điểm của AA'

3. B_1 là điểm đối xứng của B qua M

4. C_1 là điểm đối xứng của C qua M

5. C_1B_1CB là hình bình hành

6. C_1, A, B_1 thẳng hàng

7. C' đối xứng với B' qua M

Các thông tin trên được sử dụng làm các giả thiết và các kết luận.

Bạn hãy sắp xếp các thông tin trên thành các giả thiết, kết luận để có những bài toán hoàn chỉnh và giải các bài toán ấy.

§6. HÌNH CHỮ NHẬT

1. Định nghĩa

Hình chữ nhật là hình bình hành có một góc vuông.

2. Tính chất

Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân.

Định lí

$$\text{ABCD là hình chữ nhật} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ABCD là hình bình hành} \\ AC = BD \end{cases}$$

Hình chữ nhật có hai trục đối xứng là hai đường trung trực của hai cạnh kề. Hình chữ nhật có một tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.

3. Dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật

Để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật, ta có thể chứng minh tứ giác đó có một trong các tính chất sau:

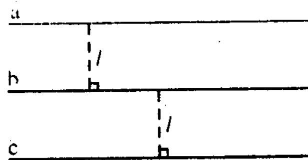
1. Tứ giác có 3 góc vuông.

2. Hình thang cân có một góc vuông.

3. Hình bình hành có một góc vuông.

4. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.

4. Quỹ tích các điểm cách một đường thẳng cho trước một khoảng cho trước



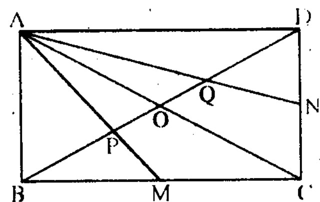
Quỹ tích các điểm (hay tập hợp các điểm) cách đường thẳng b một khoảng $l > 0$ cho trước là hai đường thẳng song song với đường thẳng b và cách đường thẳng b một khoảng l.

Bài 63

Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, DC. Các đường thẳng AM và AN cắt đường chéo BD tại điểm P và điểm Q.

Chứng minh: BP = PQ = QD.

GỢI Ý:



P là trọng tâm của Δ ABC cho ta:

$$OP = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{3}BO$$

Tương tự, Q là trọng tâm của Δ ADC ta có:

$$OQ = \frac{1}{2}DQ = \frac{1}{3}DO$$

Kết hợp với BO = DO để suy ra điều phải chứng minh.

CHÚ Ý: Hãy suy nghĩ thêm về bài toán:

a) Trong cách giải trên đây, giả thiết "ABCD là hình chữ nhật" được sử dụng ở chỗ nào? Nói khác đi, tính chất nào của hình chữ nhật đã được sử dụng trong quá trình giải bài toán?

b) Từ đó xét xem trong đề toán có thể thay "hình chữ nhật ABCD" bằng hình tứ giác gì?

Bài 64

Chứng minh rằng:

a) Nếu một hình F có hai trục đối xứng d, d' vuông góc với nhau thì F có tâm đối xứng là giao điểm O của d và d'.

b) Nếu một hình F có một trục đối xứng d và có tâm đối xứng O ∈ d thì F có trục đối xứng thứ hai d' qua O và vuông góc với d.

GIẢI

a) Lấy M bất kì thuộc hình F. Vì d và d' là trục đối xứng của F, nên ta có:

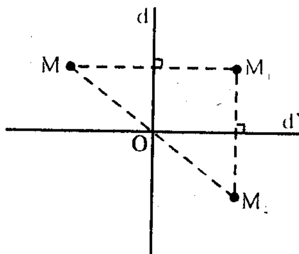
$$M \in F \Rightarrow M_1 = S_d(M) \in F.$$

(M_1 là điểm đối xứng của M qua d cũng thuộc F)

$$M_1 \in F \Rightarrow M_2 = S_{d'}(M_1) \in F.$$

(M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua d' cũng thuộc F)

Theo tính chất của đối xứng trục, ta có: d là trung trực của đoạn thẳng MM_1 và d' là trung trực của đoạn thẳng M_1M_2, mà d ⊥ d', do đó dễ dàng suy ra rằng MM_1M_2 là tam giác vuông, ba điểm M, O, M_2 thẳng hàng và OM = OM_2.



Như vậy, với mỗi điểm M ∈ F ta có M_2 ∈ F sao cho OM = OM_2, điều đó chứng tỏ O là tâm đối xứng của hình F (đpcm)

b) Lấy M bất kì thuộc F.

Vì d là trục đối xứng và $O \in d$ là tâm đối xứng của F, nên ta có:

$M \in F$, $M_1 = S_O(M) \in F$

$M_1 \in F$, $M_2 = S_d(M_1) \in F$

Tam giác MM_2M_1 vuông vì $OM = OM_1 = OM_2$.

Nếu qua O ta kẻ $d' \perp d$ (d' cắt MM_2 tại I) thì $MM_2 \perp d'$ và $IM = IM_2$ (do $OM = OM_1$). Điều này chứng tỏ M_2 đối xứng với M qua d'.

Như vậy, với mỗi điểm $M \in F$ thì $M_2 = S_{d'}(M) \in F$, nghĩa là d' là trục đối xứng của F (đpcm).

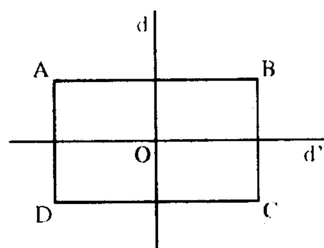
Bài 65

Chứng minh rằng:

a) Hình chữ nhật có hai trục đối xứng.

b) Nếu một tứ giác có hai trục đối xứng vuông góc với nhau và không đi qua đỉnh của tứ giác thì tứ giác đó là hình chữ nhật.

GIẢI



a) Hình chữ nhật ABCD là hình bình hành, nên nó có tâm đối xứng là giao điểm O của các đường chéo. Qua O, kẻ $d \perp AB$ và $d' \perp AD$; d và d' là hai trục đối xứng của hình chữ nhật (bạn đọc tự chứng minh).

b) Ngược lại, giả sử hình tứ giác ABCD có hai trục đối xứng d và d'

(d ⊥ d' và d, d' không qua đỉnh nào của ABCD).

Như vậy, theo bài 64, ABCD có tâm đối xứng là giao điểm O của d và d'; do đó ABCD là *hình bình hành* (theo bài 53).

Vì d và d' không qua đỉnh nào của ABCD, nên đỉnh A có đối xứng qua d và d' là hai đỉnh khác của ABCD, chẳng hạn B và D. Do d ⊥ d', suy ra $\widehat{BAD} = 90^0$, nghĩa là ABCD là *hình chữ nhật* (đpcm).

CHÚ Ý: Nếu d, d' *qua đỉnh* của ABCD thì ABCD có thể không phải là hình chữ nhật. Bạn hãy vẽ hình để thấy rõ trường hợp này.

Bài 66

Cho tứ giác ABCD. Các đường phân giác trong của các góc A, B, C, D cắt nhau tại các điểm M, N, P, Q.

1. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ có tổng các góc đối bằng nhau

2. Trường hợp tứ giác ABCD là hình thang, xét xem tứ giác MNPQ có tính chất đặc biệt gì?

3. Trường hợp ABCD là hình bình hành. Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật. Hãy phát hiện càng nhiều càng tốt, các đặc điểm của hình chữ nhật MNPQ.

GỢI Ý:

2. MNPQ có hai góc vuông.

3. MNPQ là hình chữ nhật có

– Các đường chéo song song với các cạnh của hình bình hành ABCD

– Có tâm trùng với tâm của hình bình hành ABCD.

– Đường chéo của hình chữ nhật MNPQ bằng hiệu của hai cạnh liên tiếp của hình bình hành ABCD.

NHẬN XÉT: Hãy đổi "các đường phân giác trong" thành "các đường phân giác ngoài" và tìm xem có điều gì mới trong các kết luận trên?

Bài 67

Cho tam giác ABC với AB < AC < BC và một điểm M thuộc miền trong của tam giác. Từ M kẻ các đường vuông góc MP, MQ, MR theo thứ tự xuống các cạnh BC, CA, AB và qua M kẻ đường song song với BC cắt AB ở B' và cắt AC ở C'.

1. Hãy so sánh AC' với AB' và so sánh đường cao B'I, với đường cao C'J của tam giác AB'C'

2. Chứng minh bất đẳng thức

$$B'I \leq MQ + MR \leq C'J$$

3. Gọi AH và CK là các đường cao kẻ từ A và C của tam giác ABC. Từ kết quả trên, suy ra

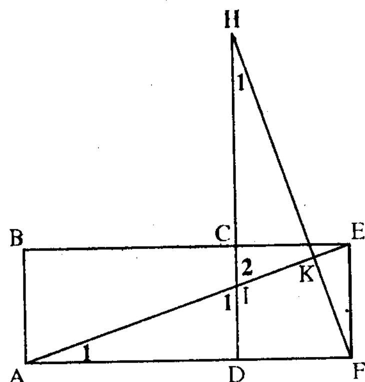
$$AH \leq MP + MQ + MR \leq CK$$

4. Chứng minh rằng, nếu ABC là tam giác đều thì tổng MP + MQ + MR có một giá trị không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong tam giác ABC.

Bài 68

Cho hình chữ nhật ABCD. Kéo dài BC và AD thêm những đoạn CE = DF = DC. Kéo dài DC một đoạn CH = BC. Nối A với E, F với H. Chứng minh rằng AE vuông góc với FH.

GIẢI



Ta có: CH = BC = AD

CD = DF = EC

Từ đó suy ra:

DH = DC + CH

= AD + DF = AF

Mặt khác, do CE //= DF

ta suy ra : FE = CD.

do đó FE = DF

và FE // CD

do đó FE ⊥ AF.

Xét hai tam giác vuông DHF và FAE, ta có:

DH = AF và DF = EF

Vậy chúng bằng nhau, cho ta $\widehat{A_1} = \widehat{H_1}$

Ta lại có: $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ (đối đỉnh), do đó $\widehat{HKI} = \widehat{ADI} = 90^0$, tức là:

FH ⊥ AE (đpcm)

Bài 69

Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BH vuông góc với AC. Gọi M là trung điểm của AH, K là trung điểm của CD. Chứng minh BM ⊥ MK.

GIẢI

Gọi N là trung điểm của BH. Đường MN cắt BC tại E. Trong Δ AHB đoạn MN là đường trung bình nên:

MN // AB và $MN = \frac{AB}{2}$ (1)

Từ MN // AB suy ra:

MN ⊥ BC, do đó N là trực tâm của Δ BMC.

Theo giả thiết, CK // AB và $CK = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$.

Kết hợp với (1), ta có MN //= CK, suy ra MNCK là hình bình hành, do đó MK // NC. Vì N là trực tâm Δ CBM nên BM ⊥ NC.

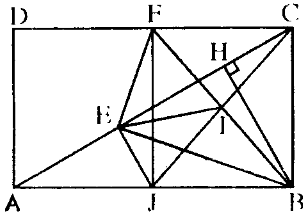
Vậy: BM ⊥ MK (đpcm).

Bài 70

Cho hình chữ nhật ABCD; kẻ BH ⊥ AC. Gọi E là trung điểm của AH và F là trung điểm của cạnh DC.

Chứng minh BE ⊥ EF.

GIẢI (vắn tắt)



Gọi J là trung điểm của AB, ta có

$$EJ \parallel HB$$

$$\Rightarrow EJ \perp AC \Rightarrow \widehat{CEJ} = 90^0$$

BCFJ là hình chữ nhật, hai đường chéo giao nhau tại I, và JC = FB. Tam giác JEC vuông, I là trung điểm của cạnh huyền JC

Suy ra $EI = \frac{1}{2}JC = \frac{1}{2}FB$

Tam giác FEB có trung tuyến EI bằng $\frac{1}{2}$ cạnh đối diện FB nên nó là tam giác vuông, cho ta

$$BE \perp EF.$$

Bài 71

Cho tam giác ABC cân, đỉnh A. Từ điểm D trên cạnh BC, ta kẻ đường vuông góc với BC, cắt AB ở E và cắt AC ở F.

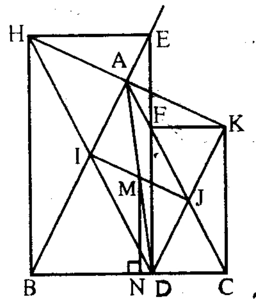
Dựng các hình chữ nhật BDEH và CDFK.

1. Chứng minh ba điểm A, H, K thẳng hàng

2. Chứng minh A là trung điểm của HK.

3. Gọi I, J theo thứ tự là tâm của các hình chữ nhật BDEH và CDFK. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn thẳng IJ khi điểm D di động trên cạnh BC.

GỢI Ý:



1. Chứng minh AH // IJ, AK // IJ và áp dụng tiên đề Euclide

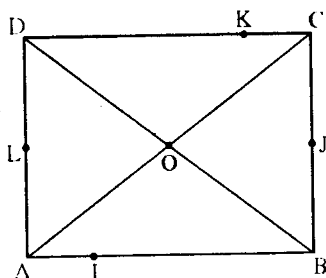
2. Chứng minh AH = AK và kết hợp với kết luận câu 1.

3. Kẻ MN ⊥ BC và kẻ đường cao AG. Dễ thấy $MN = \frac{1}{2}AG$

M nằm trên đường trung bình PQ của tam giác ABC.

NHỮNG BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

Bài 72



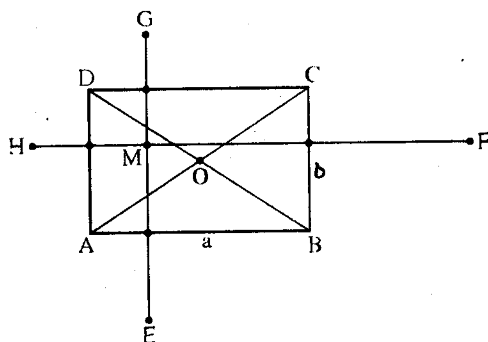
Cho ABCD là một hình chữ nhật

CK = AI và CJ = AL.

Hãy quan sát tứ giác IJKL và chứng minh những điều mà bạn cho là đúng.

Bài 73

Cho ABCD là hình chữ nhật, tâm O, AB = a, CB = b và một điểm M thuộc miền trong của hình chữ nhật ấy với các thông tin sau đây:



1. E, F theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, BC.

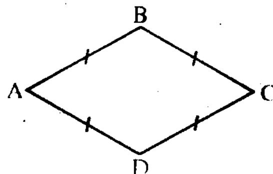
2. G, H theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng DC và AD.

Từ các thông tin trên ta có thể nêu lên những kết luận gì về các điểm E, B, F, về các đoạn thẳng EG và FH. Chứng minh các kết luận ấy.

§7. HÌNH THOI – HÌNH VUÔNG – HÌNH CON DIỀU

A. HÌNH THOI

1. Định nghĩa



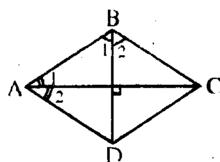
Hình thoi là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau. *Suy ra :* Hình thoi có tất cả cạnh bên bằng nhau.

2. Tính chất

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành. *Ngoài ra còn có:*

Định lí 1

ABCD là hình thoi $\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BD \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2}, \quad \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \end{cases}$



Định lí 2

$\left.\begin{array}{r} \text{ABCD là hình bình hành có } AC \perp BD \\ \text{hoặc } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ABCD là hình thoi.

Định lí 3

Hình thoi có hai trục đối xứng là hai đường chéo của nó (giao điểm của hai trục đối xứng là tâm đối xứng).

3. Dấu hiệu nhận biết hình thoi

Để chứng minh một tứ giác là hình thoi, ta có thể chứng minh một trong các tính chất sau:

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

3. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.

4. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

B. HÌNH VUÔNG

1. Định nghĩa

Hình vuông là:

– Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau.

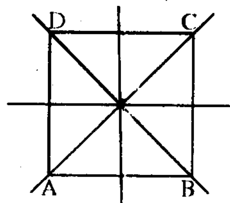
– Hình thoi có một góc vuông.

Hình vuông có bốn cạnh bằng nhau và bốn góc bằng nhau.

2. Tính chất

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi. Lưu ý:

ABCD là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD \end{cases}$



Hình vuông có bốn trục đối xứng là hai đường chéo của nó và hai đường trung trực

của hai cạnh kề (tâm đối xứng là giao điểm của các trục đối xứng).

3. Dấu hiệu nhận biết hình vuông

Để chứng minh một tứ giác là hình vuông, ta có thể chứng minh một trong các tính chất sau:

– Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau; hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc; hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc;

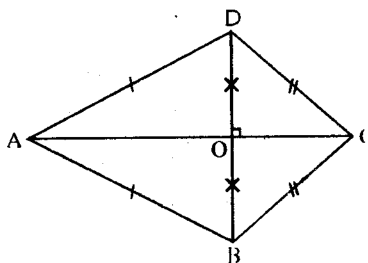
– Hình thoi có một góc vuông; hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

C. HÌNH CON DIỀU

1. Định nghĩa

Hình con diều là một tứ giác có hai cặp cạnh, mỗi cặp gồm hai cạnh liên tiếp bằng nhau.

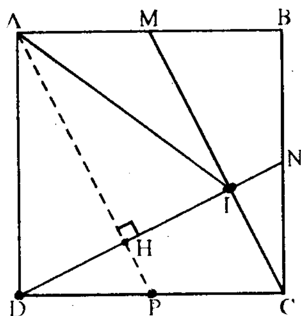
$$ABCD \text{ là hình con diều} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases}$$



2. Tính chất

Hình con diều có một trục đối xứng là một đường chéo.

Bài 74



Cho hình vuông ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Các đường thẳng DN và CM cắt nhau tại I.

Chứng minh: IA = AD.

GỢI Ý:

Δ CDN = Δ BCM $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$

$\Rightarrow$ DN $\perp$ CM

Hãy kẻ đường cao AH trong tam giác ADI; AH cắt CD ở P.

AH $\perp$ ID $\Rightarrow$ AH // CM

Suy ra P là trung điểm của CD và H là trung điểm của DI.

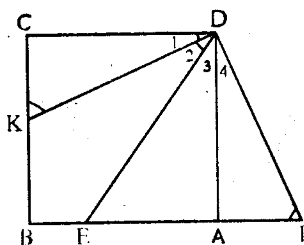
Bài 75

Trên cạnh AB của hình vuông ABCD, lấy một điểm E tùy ý. Phân giác của góc CDE cắt cạnh BC tại K.

Chứng minh: AE + KC = DE.

GỢI Ý:

Trên tia đối của tia AB, lấy điểm F sao cho AF = CK.



Δ DAF = Δ DCK

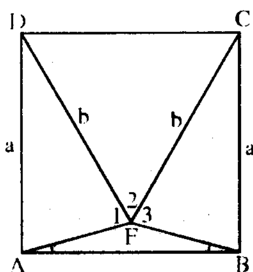
$\Rightarrow \widehat{F} = \widehat{K}$

và $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_4$

Chứng minh tiếp ΔFED cân đỉnh E.

Bài 76

Trên cạnh AB và ở phía trong hình vuông ABCD dựng tam giác AFB cân, đỉnh F, có góc ở đáy là 15°. Chứng minh rằng tam giác CFD là tam giác đều.



GIẢI (vắn tắt)

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Gọi CD = a và FC = FD = b.

Giả sử a > b. Thế thì $\widehat{F}_1 > \widehat{DAF}$ (trong tam giác, góc đối diện cạnh lớn thì lớn hơn góc đối diện cạnh nhỏ), tức $\widehat{F} > 75^o$. Cũng vậy, ta có $\widehat{F}_3 > 75^o$.

Do đó $\widehat{F}_2 < 360^o - (75^o + 75^o + 150^o)$

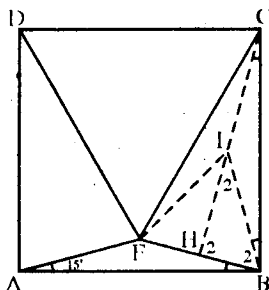
$\widehat{F}_2 < 60^o$

Trong tam giác cân DCF có $\widehat{F}_2 < 60^o$ nên $\widehat{CDF} > 60^o$.

Cạnh đối diện góc F_2 là a, cạnh đối diện góc CDF là b vì thế nên b > a, trái với giả thiết. Vậy không thể xảy ra a > b.

Tương tự ta cũng chứng minh được rằng nếu giả sử a < b ta lại suy ra được a > b, mâu thuẫn với giả thiết.

Như vậy không thể xảy ra a < b mà cũng không thể có a > b, nghĩa là a = b, tức là ΔDCF đều (đpcm).

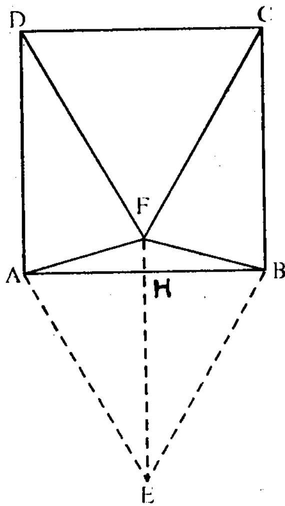


CHÚ Ý: 1. Bài này là một bài toán có nhiều cách giải. Trên đây, ta làm quen với cách chứng minh bằng phản chứng.

2. Sau đây là một vài gợi ý về một số cách giải khác.

GỢI Ý:

1. Chú ý rằng AFB là tam giác cân (đỉnh F) có trục đối xứng là đường trung trực của



AB (qua F), đây cũng là trục đối xứng của hình vuông. Vì vậy DFC là tam giác cân (đỉnh F). Chỉ còn phải chứng minh FD = DC hoặc ΔDFC có một góc 60°.

2. Dựng trên cạnh AB và về phía ngoài hình vuông, tam giác đều AEB.

Chứng minh tứ giác ADFE là hình bình hành để có

AE = DF

⇒ DF = DC = FC.

Bài 77

Cho tam giác ABC vuông tại A. Ta dựng các hình vuông ABDE và BCFG sao cho D và C ở cùng phía của cạnh AB; G và A ở cùng phía của cạnh BC.

Chứng minh rằng GA ⊥ DC và GA = DC

GỢI Ý:

a) Có thể chứng minh

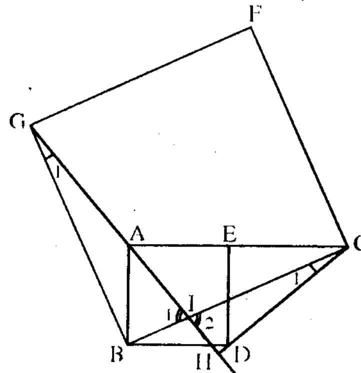
ΔABG = ΔDBC

để có $\widehat{C}_1 = \widehat{G}_1$ và chú ý:

$\widehat{G}_1 + \widehat{I}_1 = 90°$

$\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$ (đối đỉnh)

b) Nếu ABC không phải là tam giác vuông, thì kết quả trên đây có còn đúng không?



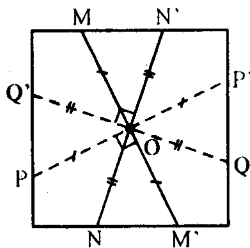
Bài 78

Một mảnh vườn hình vuông được rào xung quanh. Sau một thời gian bờ rào bị hỏng chỉ còn lại hai cọc rào ở hai cạnh đối diện. Nếu biết được tâm của mảnh vườn, hỏi có thể xác định các cạnh của mảnh vườn đó hay không?

GIẢI

1) *Phân tích:* (bạn đọc tự làm)

2) *Cách dựng:* biết tâm O và hai điểm M, N trên hai cạnh đối của hình vuông, có thể dựng được hình vuông như sau:



a) Dựng các đường thẳng MO và NO và trên các tia đối của OM, ON ta lấy các điểm M', N' sao cho:

$$OM = OM' \; ; \; ON = ON'$$

b) Dựng đường thẳng qua O, vuông góc với MM' và lấy các điểm P, P' trên đó sao cho:

$$OP = OP' = OM$$

c) Dựng đường thẳng qua O, vuông góc với NN' và lấy các điểm Q, Q' trên đó sao cho:

$$OQ = OQ' = ON$$

d) Dựng các đường thẳng MN', QP', NM', PQ' cắt nhau tại bốn điểm A, B, C, D là các đỉnh của hình vuông cần dựng.

3) *Chứng minh:* (bạn đọc tự làm)

4) *Biện luận:* các phép dựng a, b, c bao giờ cũng thực hiện được

một cách duy nhất. Đối với phép dựng d, ta xét hai trường hợp:

* M' ≢ N (N' ≢ M) (tức là ba điểm M, N, O đã cho *không thẳng hàng* với nhau), lúc đó, do có một đường thẳng duy nhất qua hai điểm phân biệt, bài toán có một nghiệm hình.

* M' ≡ N (N' ≡ M), ba điểm M, N, O thẳng hàng, bài toán có vô số nghiệm hình.

CHÚ Ý: Nếu M, N *ở trên cùng một cạnh*, hoặc *ở trên hai cạnh liền nhau* thì bài toán bao giờ cũng có một nghiệm hình duy nhất.

Bài 79

Cho tam giác đều ABC, trực tâm H. Từ một điểm M bất kì trên cạnh BC kẻ ME ⊥ AB và MF ⊥ AC, gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM. D là chân đường cao hạ từ A.

1. Chứng minh tứ giác DEIF là hình thoi.

2. Chứng minh các đường thẳng MH, ID, EF đồng quy.

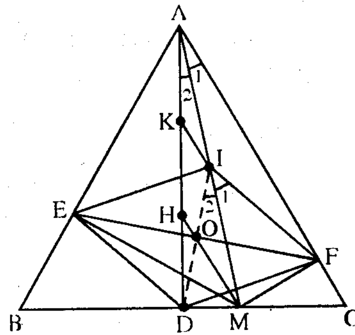
GIẢI (vắn tắt)

1. Ta có $FI = \frac{1}{2}AM$

$DI = \frac{1}{2}AM$

$\Rightarrow FI = DI$ hay

Δ DIF cân, đỉnh A (1)



Ta lại có $\hat{I}_1 = 2\hat{A}_1$

$\hat{I}_2 = 2\hat{A}_2$

$\Rightarrow \widehat{DIF} = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 60^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔDIF là tam giác đều, cho ta

$$FI = FD = ID$$

Tương tự, ta chứng minh được tam giác DIE đều cho ta

$$EI = ED = ID$$

Kết quả

$$FI = FD = EI = ED \Rightarrow \text{DEIF là hình thoi}$$

2. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng AH. Và O là giao điểm của EF và ID, hay O là trung điểm của đoạn thẳng ID, ta có:

$$OH \parallel KI$$

Ta cũng có $HM \parallel KI$

Theo tiên đề Euclide, ta suy ra ba điểm H, O, M thẳng hàng hay HM đi qua giao điểm O của ID và EF tức là ba đường thẳng HM, ID và EF đồng quy.

NHẬN XÉT VỀ PHƯƠNG PHÁP: Để chứng minh ba đường thẳng HM, ID, EF đồng quy, ta đã chứng minh HM đi qua giao điểm O của EF và ID. Bài toán này lại đưa về việc chứng minh ba điểm H, O, M thẳng hàng.

Bài 80

Cho tứ giác ABCD. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD và M, N theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD.

1. Chứng minh tứ giác MPNQ là hình bình hành

2. Tứ giác ABCD phải có điều kiện gì để MPNQ là hình thoi.

GỢI Ý:

Thử suy nghĩ xem, đây là một "người quen cũ", ta đã gặp ở đâu?

Bài 81

Cho hình thoi ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N, trên tia đối của tia DC lấy điểm P, trên tia đối của tia AD lấy điểm Q sao cho BM = CN = DP = AQ.

Chứng minh:

1. Tứ giác MNPQ là hình bình hành

2. Hình bình hành MNPQ và hình thoi ABCD có cùng tâm.

3. Với điều kiện nào của bài toán thì MNPQ là hình thoi? Trong trường hợp này, hình thoi MNPQ có gì đặc biệt.

GỢI Ý:

1. Chứng minh các tam giác bằng nhau:

$$\Delta\ QAM = \Delta\ NCP$$

$$\Delta\ MBN = \Delta\ PDQ.$$

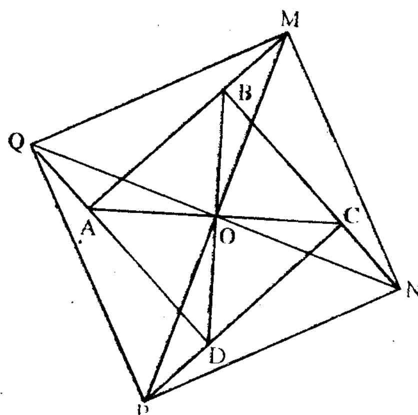
2. Chứng minh MP, QN đi qua tâm O của hình thoi ABCD hay chứng minh:

– Ba điểm M, O,P thẳng hàng.

– Ba điểm Q, O, N thẳng hàng.

3. Để MNPQ là hình thoi cần QM = MN, suy ra $\widehat{BAD} = 90^\circ$ hay ABCD phải là hình vuông.

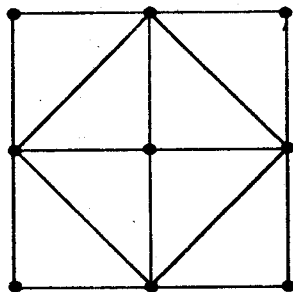
Trong trường hợp này MNPQ là một hình thoi đặc biệt, nó là hình vuông.

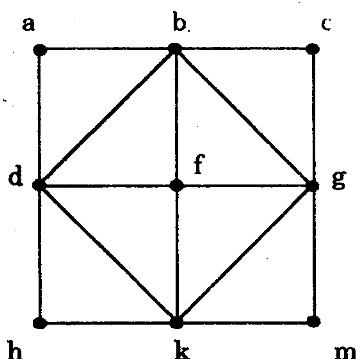


Bài 82

Đặt đủ chín số từ 1 đến 9 vào các đỉnh của hình bên, sao cho tổng các số trên bốn đỉnh của hình vuông nào cũng bằng nhau.

(Đề thi Olympic toán toàn LB Nga 1998, lớp 8, vòng 1)





GỢI Ý:

Gọi tổng các số trên các đỉnh của mỗi hình vuông là S (có 6 hình vuông).

(a + c + m + h) + (d + b + g + k) + f = 1 + 2 + ... + 9 = 45 hay
2S + f = 45 (1)

Lại có:

(a + b + d + f) + (b + c + g + f) + (g + m + k + f) + (d + h + k + f) = 4S hay S = 15 + f (2)

Từ (1) và (2), có f và S.

Bài toán có mấy lời giải?

NHỮNG BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

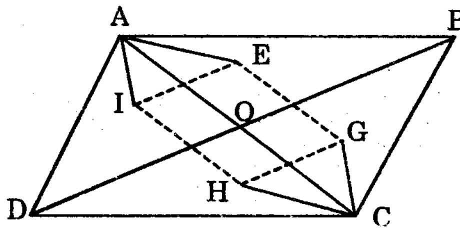
Bài 83

Cho hình vuông ABCD; gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

CHÚ Ý: Sau khi tìm được kết luận, hãy giải bài toán với một chút thay đổi trong giả thiết: E, F, G, H theo thứ tự là những điểm thuộc cạnh AB, BC, CD, DA sao cho AE = BF = CG = DH.

– Hãy thay các từ *những điểm thuộc cạnh* bằng các từ *những điểm thuộc đường thẳng...*, *nhưng không thuộc cạnh...* và xét các kết luận trong giả thiết mới!

Bài 84



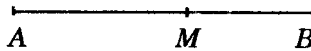
Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi I, E, G, H theo thứ tự là các giao điểm của các đường phân giác trong của các tam giác ABO, BCO, CDO, DAO.

Chú ý: Các đường gạch gạch trên hình vẽ là một gợi ý.

• PHÉP CHIA VÀNG – TỈ SỐ VÀNG – HÌNH CHỮ NHẬT VÀNG

Cho một đoạn thẳng AB. Nếu có một điểm M thuộc đoạn AB và chia AB theo tỉ số

$$\varphi = \frac{AM}{AB} = \frac{MB}{AM}$$



thì phép chia này được gọi là phép chia vàng *(phép chia hoàng kim) và số φ được gọi là* tỉ số vàng; *M là* điểm chia vàng.

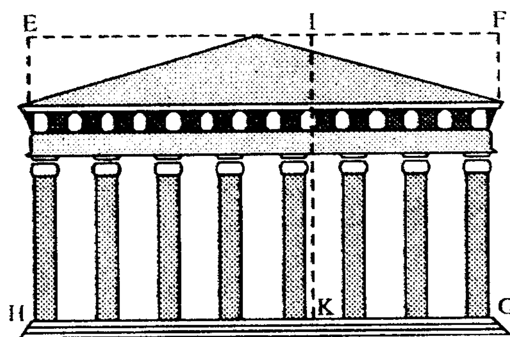
Người ta đã tính được giá trị của φ:

$$\varphi = 0,6180339887...$$

và người ta cũng đã chứng minh được một tính chất độc đáo của φ: "Số φ là số dương duy nhất mà đem cộng với 1 thì bằng số nghịch đảo của nó

$$\varphi + 1 = 1,618033\ ... = \frac{1}{\varphi}\text{"}$$

Ngay từ thời cổ Hi Lạp, người ta đã chú ý đến tỉ số vàng



ra tỉ số này đóng một vai trò quan trọng trong điêu khắc, trong kiến trúc, trong hội họa v.v... để tạo ra những nét đẹp cân đối. Nhiều pho tượng cổ Hi Lạp còn sót lại có các kích thước phù hợp với tỉ số vàng. Các đền đài miếu mạo như Ngôi đền Parthenon được xây dựng cách nay trên 2500 năm (hiện còn dấu vết ở thủ đô Athènes của Hi Lạp) cũng tuân theo tỉ số vàng. Các họa sĩ thời Phục hưng cũng thường thể hiện tỉ số này trong các họa phẩm nổi tiếng, trong đó có cả bức danh họa La Joconde của họa sĩ thiên tài Leonardo da Vinci.

Vào thời trung cổ, việc xây dựng các nhà thờ châu Âu và các họa tiết trang trí cũng dựa trên tỉ số vàng.

Một số nhạc cụ như chiếc vĩ cầm được chế tạo theo các kích thước đảm bảo tỉ số vàng và ngày nay, tỉ số vàng còn được ứng dụng rộng rãi trong giải phẫu thẩm mĩ để tạo ra những nét đẹp thanh tú hài hòa.

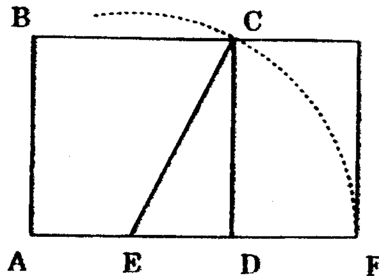
Người ta cũng nhận ra rằng các hình chữ nhật mà tỉ số các kích thước của nó thỏa mãn tỉ số vàng là các hình chữ nhật cân đối nhất, và các hình chữ nhật này được gọi là hình chữ nhật vàng.

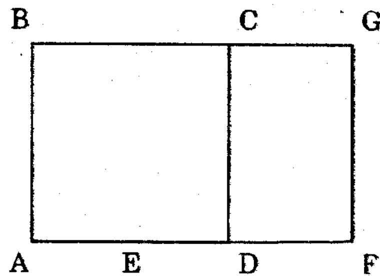
Trong thực tế vì số $\varphi = 0,6180...$ là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn nên để cho tiện việc tính toán, người ta thường chọn cho φ giá trị gần đúng là 0,62. Như vậy các hình chữ nhật có kích thước 3×5; 4×6, 5×8 ... là những hình chữ nhật vàng.

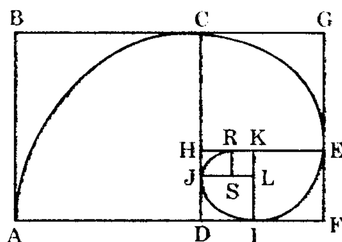
Bạn hãy dựng một hình vuông ABCD. Lấy trung điểm E của AB làm tâm, quay một cung tròn bán kính EC, cắt tia

AD tại điểm F. Dựng hình chữ nhật DFGC, ta có các hình chữ nhật AFGB, DFGC là các hình chữ nhật vàng.

Trong hình chữ nhật DFGC, dựng hình vuông CGEH thì hình chữ nhật DFEH là hình chữ nhật vàng. Và tiếp tục quá trình này mãi, ta được các điểm A, C, E, I, J, R... là các điểm chia vàng. Nối các điểm này lại bằng các cung tròn, ta được một đường cong gọi là đường xoắn ốc Lôgarit.

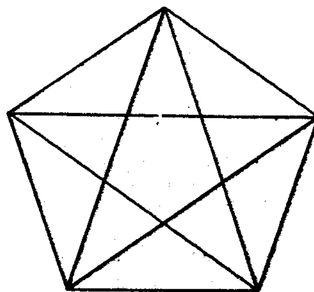


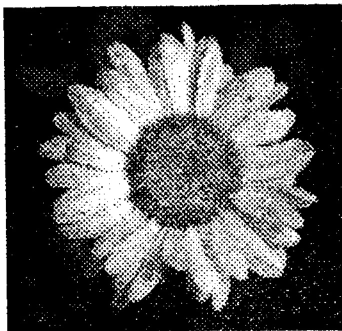




Điều thú vị là trong thiên nhiên có rất nhiều dạng đường cong tuân theo đúng đường xoắn ốc này. Chẳng hạn như vỏ của loài ốc Nautilus hoặc trên bề mặt của bông hoa hướng dương (hoa quỳ) có hai họ đường cong trái chiều nhau là những đường xoắn ốc. Trên vỏ quả thông và quả của một số cây thuộc họ tùng bách, các vảy cũng được xếp theo đường xoắn ốc.

Tỉ số vàng còn có mặt trong các hình ngũ giác đều, các ngôi sao 5 cánh.





Tỉ số vàng tự nó chứa chất nhiều tính chất bí ẩn, kì diệu. Chẳng phải ngẫu nhiên mà ban đầu, người Hi Lạp gọi nó là "số thiêng liêng", "số thần thánh", và nhà Thiên văn học, nhà toán học nổi tiếng người Đức là J. Képler đã nói: "Hình học có hai viên ngọc quý – đó là định lí Pythagore và phép chia theo tỉ số vàng".

§8. ĐA GIÁC

1. Khái niệm về đa giác

Đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ là hình gồm các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, sao cho bất kỳ hai đoạn thẳng nào mà có một điểm chung thì đều không cùng nằm trên một đường thẳng. Các khái niệm cạnh, đỉnh, đường chéo, góc của đa giác, đa giác lồi, điểm trong của đa giác được định nghĩa tương tự như đối với tứ giác.

Đa giác có n đỉnh ($n \geq 3$; $n \in \mathbf{N}$) còn gọi là hình n–giác hay hình n–cạnh.

Với n = 3 ta có hình tam giác,

n = 4 ta có hình tứ giác,

n = 5 ta có hình ngũ giác,

v.v...

2. Đa giác đều

Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

Bài 85

Trong hình bên, người ta đã phải kẻ bao nhiêu đường chéo của đa giác?

GỢI Ý:

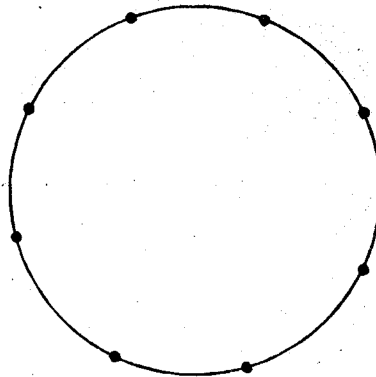
Hãy giải bài toán tổng quát hơn: "Trong một hình n-giác lồi (n > 3) có bao nhiêu đường chéo?" Chú ý rằng từ mỗi đỉnh của n-giác, ta kẻ được n–3 đường chéo. Kết quả:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Trong hình trên, có 262 đường chéo.

Bài 86

Một trò chơi: **Cho 8 điểm trên đường tròn. Hai bạn An và Bình thay nhau kẻ các đoạn thẳng nối các cặp đỉnh, mỗi người kẻ ít nhất một đoạn thẳng, nhiều nhất hai đoạn thẳng. Ai không kẻ được đoạn thẳng nào nữa thì thua cuộc. Nếu là người chơi trước, An làm thế nào để có thể chắc thắng?**



GỢI Ý:

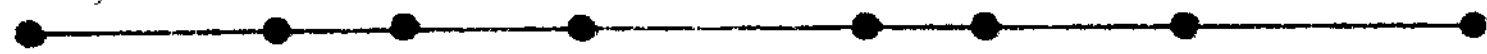
Phải biết số đoạn thẳng có thể kẻ được là bao nhiêu. Xét bước cuối cùng của trò chơi: muốn chắc thắng, An phải để lại cho Bình đúng 3 đoạn thẳng chưa kẻ (vì sao?). Tiếp tục đi ngược lên, để suy ra "chiến lược" của An.

Nếu trên vòng tròn, cho 7 điểm, 9 điểm thì sao? Tổng quát với n điểm (n > 3)?

Bài 87

a) Có 8 người bạn gặp nhau, mỗi người bắt tay với tất cả những người khác và không có hai người nào bắt tay nhau lần thứ hai. Có bao nhiêu cái bắt tay tất cả?

b) Trên hình sau đây, có bao nhiêu đoạn thẳng?



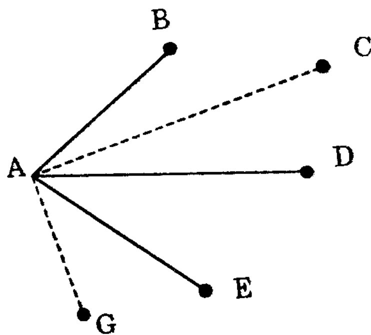
c) Có 6 người khách lên một xe buýt. Chứng minh rằng giữa họ có 3 người đã quen biết nhau từng đôi hoặc có 3 người từng đôi chưa hề quen nhau.

GỢI Ý:

a) Mời mỗi người đứng ở một đỉnh của một 8-giác lồi. Hai người bắt tay nhau tương ứng với việc nối hai đỉnh bằng một đoạn thẳng.

b) Các bạn nói trên đứng thẳng hàng thì số cái bắt tay không hề thay đổi.

c) Coi 6 người là các đỉnh của một hình lục giác. Khi hai người (A, B) quen nhau, ta nối A với B bằng một đoạn thẳng tô màu đỏ. Khi hai người (A, C) không quen nhau, ta nối A với C bằng một đoạn thẳng tô màu xanh. (Trên hình vẽ, đoạn thẳng màu đỏ là đoạn thẳng nét liền, đoạn thẳng màu xanh là đoạn thẳng nét đứt). Ta có bài toán:



Nếu các cạnh và đường chéo của một lục giác được tô màu đỏ hoặc xanh thì bao giờ cũng có một tam giác có các cạnh cùng màu.

Bài toán có thể giải theo các bước như sau:

– Xét các đoạn thẳng xuất phát từ một đỉnh; thế nào cũng có ít nhất 3 đoạn được tô cùng màu (vì sao?).

– Giả sử AB, AD, AE cùng màu đỏ. Xét tam giác BDE trong trường hợp có một cạnh màu đỏ và trong trường hợp không có cạnh nào màu đỏ.

Từ lời giải bài toán trên, bạn có thể thấy rằng bài toán sau đây không phải là quá khó:

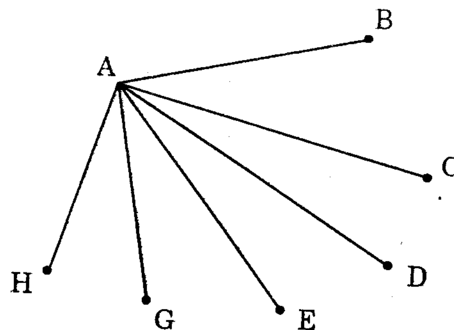
Có 17 nhà bác học, mỗi người trao đổi thư từ với 16 người khác. Trong thư, họ chỉ bàn về ba đề tài, nhưng bất cứ hai nhà bác học nào cũng bàn với nhau chỉ về một đề tài. Chứng minh rằng có không ít hơn 3 nhà bác học đã bàn với nhau về cùng một đề tài.

(Đề thi Toán Quốc tế lần VI, 1964)

Bạn thử giải theo các bước như sau:

– Coi 17 nhà bác học là các đỉnh của một hình 17-giác lồi; các cạnh và đường chéo của đa giác này được tô một trong ba màu: đỏ, xanh, vàng (tương ứng với việc trao đổi giữa hai nhà bác học về một đề tài). Phải chứng minh: hình vẽ có ít nhất một tam giác có ba cạnh cùng màu.

– Một đỉnh bất kì của hình 17-giác là đầu mút của ít nhất 6 đoạn thẳng cùng màu (vì sao?). Giả sử AB, AC, AD, AE, AG, AH cùng màu đỏ.



– Xét các cạnh và đường chéo của hình lục giác BCDEGH trong hai trường hợp: a) có một đoạn thẳng màu đỏ; b) không có đoạn thẳng nào màu đỏ (tức là các cạnh và đường chéo của lục giác BCDEGH được tô một trong hai màu xanh hoặc vàng).

Bài 88

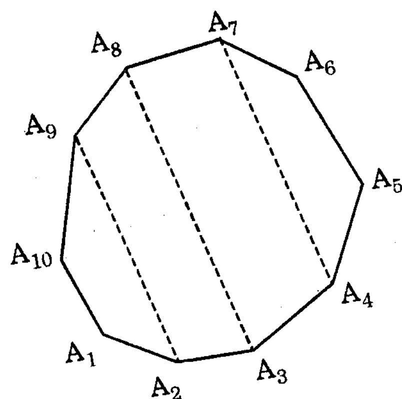
Chứng minh rằng trong một hình 2n - giác lồi (n > 2) tùy ý, bao giờ cũng tìm được những đường chéo không song song với bất kì một cạnh nào của đa giác ấy.

(Đề thi vô địch toán lớp 9, Mascova, 1974)

GIẢI

Xét một cạnh bất kỳ A_1A_{2n} của đa giác. Những đường chéo xuất phát từ A_1 và A_{2n} thì đương nhiên không song song với A_1A_{2n}, vì vậy đường chéo nào song song với A_1A_{2n} cũng là đoạn thẳng nối hai trong 2n – 2 đỉnh còn lại.

Ta biết rằng không thể có hai đoạn thẳng đi qua một đỉnh mà cùng song song với A_1A_{2n}. Vì vậy, hai đoạn thẳng song song với A_1A_{2n} phải nối hai cặp đỉnh khác nhau, do đó trong các đoạn thẳng nối từng cặp trong 2n – 2 đỉnh, có nhiều nhất là $\frac{2n-2}{2} = n-1$ đoạn thẳng song song với A_1A_{2n}. Trong các đoạn thẳng này, có một cạnh, còn lại n – 2 đường chéo (hình vẽ minh họa cho trường hợp 2n = 10, lúc đó có nhiều nhất là n – 2 = 5 – 2 = 3 đường chéo song song với A_1A_{10}).



Với mỗi cạnh, có nhiều nhất là n – 2 đường chéo song song với nó; đa giác có 2n cạnh, nên có nhiều nhất là 2n(n – 2) đường chéo song song với *một cạnh nào đó* của đa giác.

Tổng số các đường chéo của 2n - giác là $\frac{2n(2n-3)}{2}$ = n(2n – 3), cho nên ta có ít nhất là

$$n(2n - 3) - 2n(n - 2) = n$$

đường chéo không song song với *bất kì cạnh nào* của 2n-giác đã cho (đpcm).

Bài 89

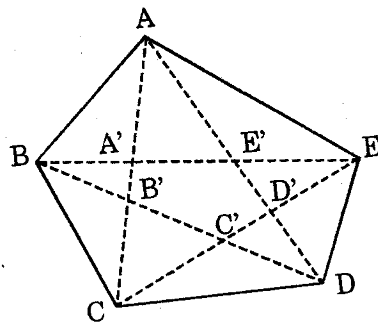
Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của ngũ giác đó.

(Bài thi học sinh giỏi trên Vô tuyến truyền hình Hungari, năm 1981 – vòng 1)

GỢI Ý:

Ta có:

AB + BC + CD + DE + EA
< (AA' + A'B) + (BB' + B'C) +
(CC' + C'D) + (DD' + D'E) +
(EE' + E'A) (1)



Mặt khác:

(AA' + B'C) < AC,
(BB' + C'D) < BD,
(CC' + D'E) < CE,
(DD' + E'A) < DA,
(EE' + A'B) < BE (2)

Kết hợp (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 90

Cho một hình n-giác lồi P (n > 6), có chu vi bằng 2, và một n-giác lồi M khác, có đỉnh là trung điểm các cạnh của n-giác P. Chứng minh rằng chu vi của đa giác M lớn hơn 1.

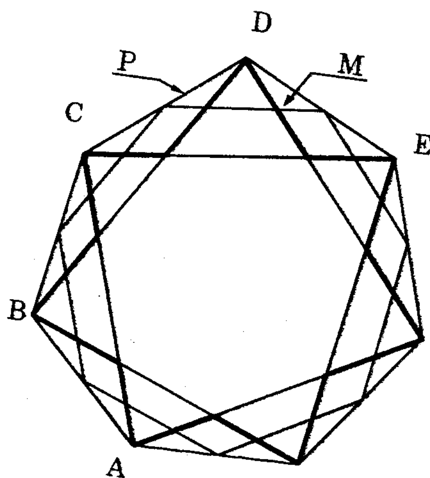
(Đề thi vô địch toán Mascova, 1971)

GỢI Ý:

Gọi m là chu vi của M. p là chu vi của P, m bằng một nửa tổng q các đường chéo AC + CE + ... (đường chéo nối *cách một đỉnh*).

Chu vi s của hình sao (nét đậm) lớn hơn p, nhưng nhỏ hơn q.

2m = q > s > p.



Bài 91

Cho hình ngôi sao 5 cánh ABCDE

Tính tổng các góc A, B, C, D,E

Tính giá trị mỗi góc, nếu ABCDE là ngôi sao 5 cánh đều.

Đáp số :

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} = 180^\circ$

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 36^\circ$.

§9. KHÁI NIỆM DIỆN TÍCH MIỀN ĐA GIÁC

Khi đã chọn một đơn vị đo diện tích thì mỗi miền đa giác có một diện tích. Diện tích có các tính chất cơ bản sau:

1. Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

2. Nếu một đa giác được chia thành nhiều đa giác không có điểm trong chung nhau thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của các đa giác đó.

3. Hình vuông có độ dài cạnh bằng một đơn vị dài thì có diện tích bằng một đơn vị vuông.

Nhờ ba tính chất trên, với mỗi đa giác ta có thể đặt tương ứng một số dương duy nhất gọi là diện tích của đa giác đó.

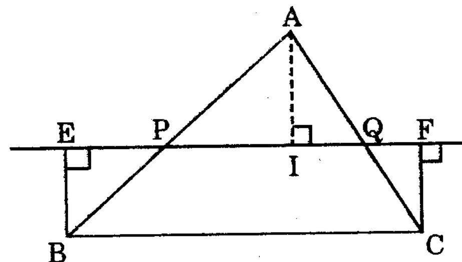
Bài 92

Cho tam giác ABC. Hãy dựng hình chữ nhật có một cạnh bằng một cạnh của tam giác và diện tích bằng diện tích tam giác ABC.

Cách dựng:

– Kẻ đường thẳng đi qua trung điểm P của AB và Q của AC. Từ B kẻ BE và từ C kẻ CF vuông góc với PQ.

Tứ giác BEFC là hình chữ nhật phải dựng.



Chứng minh

Do EF // BC và BE // CF nên BEFC là hình bình hành, ta lại có $\widehat{E} = 90^o$ do đó BEFC là hình chữ nhật, có đáy BC là cạnh của Δ ABC.

Kẻ AI ⊥ PQ ta có:

$$\Delta\ AIP = \Delta\ BEP \Rightarrow S_{AIP} = S_{BEP} \quad (1)$$

$$\Delta\ AIQ = \Delta\ CFQ \Rightarrow S_{AIQ} = S_{CFQ} \quad (2)$$

Hình chữ nhật BEFC được chia thành tứ giác BPQC, và các tam giác BEP, CFQ không có điểm trong chung nhau, vậy:

$$S_{BEFC} = S_{BEP} + S_{BPQC} + S_{CFQ} \quad (3)$$

Tam giác ABC được chia thành tứ giác BPQC và các tam giác AIP, AIQ không có điểm trong chung nhau, vậy:

$$S_{ABC} = S_{AIP} + S_{BPQC} + S_{AIQ} \qquad (4)$$

Kết hợp (1), (2), (3), (4) ta có:

$$S_{BEFC} = S_{ABC}$$

Vậy hình chữ nhật BEFC là hình chữ nhật có một cạnh bằng một cạnh của tam giác ABC và diện tích bằng diện tích của tam giác ABC.

Biện luận: Ta dựng được 3 hình chữ nhật như vậy theo ba cạnh của tam giác.

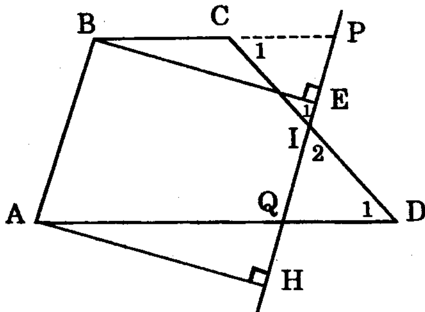
Bài 93

Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ là BC. Từ trung điểm I của CD, ta kẻ Ix song song với AB. Từ A và B hạ AH và BE vuông góc với Ix. Chứng minh rằng diện tích tứ giác ABEH bằng diện tích hình thang ABCD.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán Hà Nội năm học 1980/81)

GIẢI

Gọi P và Q là các giao điểm của đường thẳng Ix với các đường thẳng BC và AD.



Ta có:

Δ ICP = Δ IDQ

(vì IC = ID, $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$, $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$)

Theo tính chất 1) của diện tích ta được:

$$S_{ICP} = S_{IDQ}$$

Hình thang ABCD được chia thành hình ngũ giác

ABCIQ và tam giác IDQ không có điểm trong chung nhau.

Hình bình hành ABPQ được chia thành ngũ giác ABCIQ và tam giác ICP không có điểm trong chung nhau.

Theo tính chất 2) ta có:

$$S_{ABCD} = S_{ABCIQ} + S_{IDQ}$$

$$S_{ABPQ} = S_{ABCIQ} + S_{ICP}$$

Do vậy, ta được:

$$S_{ABCD} = S_{ABPQ} \qquad (1)$$

Ta dễ dàng chứng minh được:

$$\Delta\ AHQ = \Delta\ BEP \Rightarrow S_{AHQ} = S_{BEP}$$

Hình bình hành ABPQ được chia thành tứ giác ABEQ và tam giác BEP không có điểm trong chung nhau.

Tứ giác ABEH được chia thành tứ giác ABEQ và tam giác AHQ không có điểm trong chung nhau.

Suy ra:

$$S_{ABPQ} = S_{ABEQ} + S_{BEP}$$

$$S_{ABEH} = S_{ABEQ} + S_{AHQ}$$

Vậy $S_{ABPQ} = S_{ABEH}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$S_{ABEH} = S_{ABCD}$$

Bài 94

Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M và K là trung điểm của các cạnh CD và DE; L là giao điểm của AM và BK. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABL bằng diện tích tứ giác MDKL. Tính độ lớn của góc giữa AM và BK.

(Đề thi vô địch toán lớp 8 – CHLB Nga, 1980)

GỢI Ý:

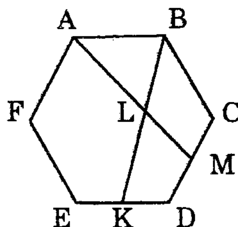
Bằng cách chứng minh các tam giác bằng nhau, hãy chứng minh:

$$S_{ABC} + S_{ACM} = S_{BCD} + S_{BDK}$$

để suy ra:

$$S_{ABCM} = S_{BCDK}$$

$$\widehat{ALB} = 60^o.$$

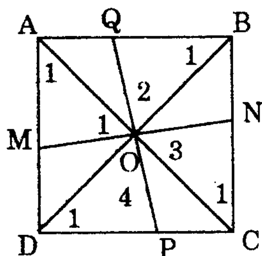


Bài 95

Cho hình vuông ABCD. Qua giao điểm O của các đường chéo ta kẻ hai đường thẳng vuông góc với nhau MON và POQ cắt AD, BC, DC, AB theo thứ tự M, N, P, Q. Chứng minh rằng hai đường thẳng vuông góc này chia hình vuông thành bốn tứ giác có diện tích bằng nhau.

(Đề thi vào cấp 3 chuyên Toán, 1979)

GỢI Ý:



Có thể kẻ hai đường chéo của hình vuông, chia hình vuông ra bốn phần có diện tích bằng nhau. Chỉ cần chứng minh

Δ OAM = Δ ODP = Δ OCN = Δ OBQ

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 = 45^o$

OA = OB = OC = OD.

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$ vì đối đỉnh: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ vì là góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

§10. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

1. Diện tích hình chữ nhật

$$S = a.b$$

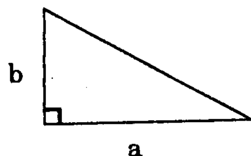
2. Diện tích hình vuông

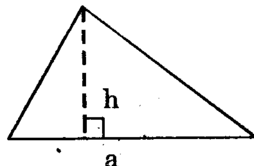
$$S = a^2$$

3. Diện tích tam giác

* *Tam giác vuông*

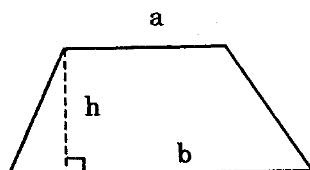
$$S = \frac{1}{2}ab$$





* Tam giác bất kì

$$S = \frac{1}{2}a.h$$

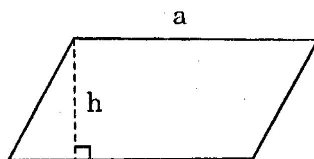


4. Diện tích hình thang

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h$$

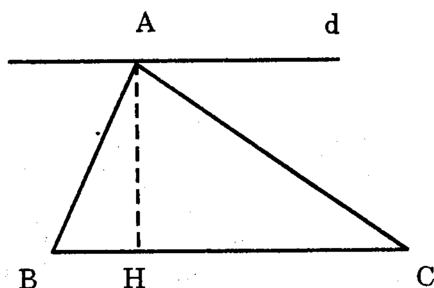
5. Diện tích hình bình hành

$$S = a.h$$



Bài 96

Cho tam giác ABC có đáy BC cố định. Đỉnh A di động sao cho diện tích của tam giác ABC bằng một số không đổi cho trước. Tìm tập hợp các đỉnh A.



GỢI Ý:

Gọi diện tích tam giác là S.

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}AH.BC$$

$$AH = \frac{2S}{BC}$$

Do đó, theo định lí về tập hợp các điểm cách một đường thẳng cho trước một khoảng cho trước, ta có tập hợp các điểm A là hai đường thẳng song song với cạnh đáy BC.

Từ bài toán này ta rút ra được một kết quả quan trọng vận dụng nhiều trong việc giải toán.

> *Những tam giác có chung đáy còn đỉnh thứ ba nằm trên một đường thẳng song song với đáy chung ấy thì có diện tích bằng nhau.*
>
> *Ngược lại, những tam giác có chung đáy và có diện tích bằng nhau thì đỉnh thứ ba của chúng nằm trên một đường thẳng song song với đáy chung ấy.*

Bài 97

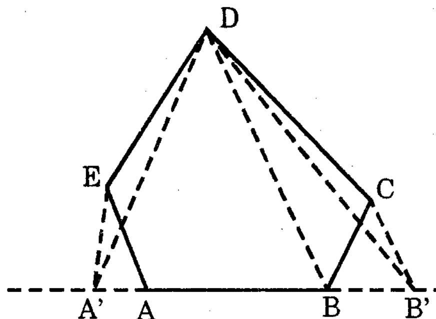
Cho hình ngũ giác lồi ABCDE. Hãy dựng một tam giác có diện tích bằng diện tích hình ngũ giác ấy.

GIẢI

Phân tích: Giả sử đã dựng được tam giác DA'B' sao cho:

$S_{DA'B'} = S_{ABCDE}$

Kẻ DA và DB. Ta thấy ngũ giác ABCDE và tam giác DA'B' có phần chung là tam giác DAB và:



$S_{DEA} = S_{DA'A}$

$S_{DBC} = S_{DBB'}$

Hai tam giác DEA và DA'A có cùng diện tích và có chung đáy AD nên A'E // AD.

Tương tự, ta có B'C // BD

Từ đó, ta có cách dựng sau đây:

Cách dựng: Từ đỉnh D chẳng hạn, ta nối DA, DB.

Qua đỉnh E kẻ đường song song với DA cắt đường thẳng AB ở A', và qua C kẻ đường thẳng song song với DB, cắt đường thẳng AB ở điểm B'. Tam giác DA'B' là tam giác phải dựng.

Chứng minh và biện luận (bạn đọc tự làm)

Bài 98

Cho tam giác ABC và một điểm D trên BC. Hãy dựng qua D một đường thẳng chia tam giác đã cho thành hai phần có diện tích bằng nhau.

GIẢI

Phân tích:

Giả sử đường thẳng DE dựng được đã chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

$S_{DEC} = S_{ABDE}$ (1)

Nối A với D, ta có:

$S_{ABDE} = S_{ADE} + S_{ADB}$

Dựng đường thẳng Bx // DA cắt CA kéo dài tại G. Ta có:

$S_{ADB} = S_{ADG}$ (vì có chung đáy AD và BG // DA)

Như vậy:

$$S_{ABDE} = S_{ADE} + S_{ADG} = S_{DGE}$$

Theo điều kiện (1), đẳng thức cuối này có thể viết:

$$S_{DEC} = S_{DGE}$$

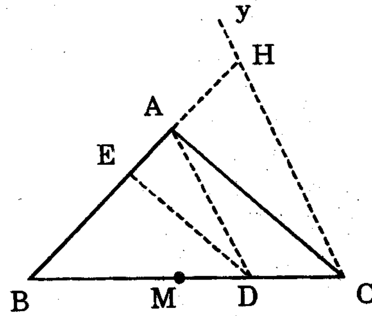
Hai tam giác DEC và DGE có chung đường cao và có diện tích bằng nhau. Do đó hai đáy có độ dài bằng nhau, nghĩa là GE = EC, hay E là trung điểm của GC.

Cách dựng:

1. Nối A với D

2. Kẻ Bx // AD cắt đường thẳng CA tại G;

3. Dựng trung điểm E của đoạn thẳng CG.



Đường thẳng DE chia Δ ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Chứng minh: (Bạn đọc tự chứng minh)

Biện luận: Ở đây, vai trò của hai đỉnh B, C là như nhau, cho nên đương nhiên phải nghĩ đến việc dựng Cy // DA, cắt BA kéo dài ở H, và dựng trung điểm E' của BH.

Tuy nhiên, E phải nằm trên cạnh AC (E' phải nằm trên cạnh AB), và bài toán bao giờ cũng có một nghiệm hình duy nhất: khi D ≡ M (trung điểm của BC) thì E ≡ E' ≡ A; khi D thuộc đoạn thẳng BM thì ta dựng Bx // AD và được E thuộc cạnh AC; khi D thuộc đoạn thẳng CM thì ta dựng Cy // AD và được E' thuộc cạnh AB.

Bài 99

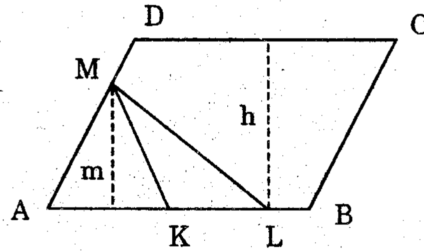
Chứng minh rằng diện tích của tam giác nội tiếp trong hình bình hành không thể lớn hơn một nửa diện tích của hình bình hành đó.

(Đề thi vô địch toán Hungari, 1915)

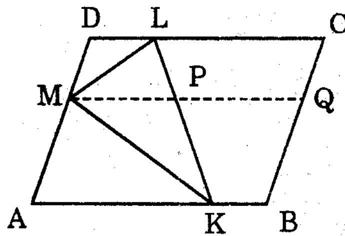
Chú thích: Tam giác nội tiếp trong hình bình hành là tam giác nằm ở miền trong của hình bình hành và có các đỉnh nằm trên các cạnh của hình bình hành.

GIẢI

a) Trước hết, xét *trường hợp đặc biệt* khi tam giác có hai đỉnh (K, L) nằm trên một cạnh của hình bình hành ABCD. Vì m ≤ h, KL ≤ AB, nên



$$S_{KLM} = \frac{1}{2}m.\quad KL \le \frac{1}{2}h.\quad AB = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$



b) Trong trường hợp tổng quát: K, L, M nằm trên ba cạnh khác nhau của hình bình hành. Khi đó, bao giờ cũng có hai đỉnh (thí dụ K và L) nằm trên hai cạnh đối diện của ABCD. Từ M kẻ đường song song với AB, cắt LK ở P và BC ở Q. *Bài toán được đưa về trường hợp đặc biệt đã xét:*

$$S_{KLM} = S_{KPM} + S_{PML} \le \frac{1}{2}S_{ABQM} + \frac{1}{2}S_{MQCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Bài 100

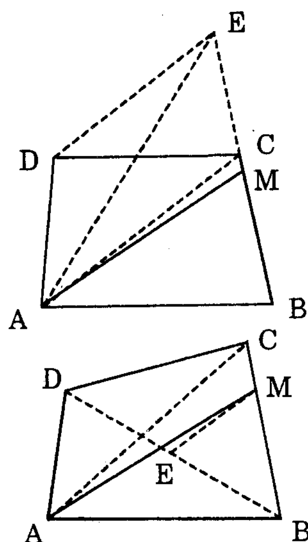
Cho tứ giác ABCD bất kì. Chứng minh rằng qua mỗi đỉnh của tứ giác có thể kẻ được một đường thẳng chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

GỢI Ý:

Vận dụng kết quả các bài 96, 98 ta có cách dựng sau đây:

Cách 1:

Qua D kẻ đường thẳng song song với AC, cắt tia BC ở E.



Trung tuyến AM của tam giác ABE là đường cần dựng.

Cách 2

Lấy trung điểm E của đường chéo DB. Qua E vẽ đường song song với đường chéo AC, cắt BC ở M, AM là đường cần tìm.

CHÚ Ý: Cũng như với bài 98, ở đây vai trò của BC và CD là như nhau (cạnh không qua đỉnh A), do đó trong phần *biện luận*, cần xem xét khi nào thì có điểm M ở trên cạnh BC, khi nào có điểm M trên cạnh DC.

Bài 101

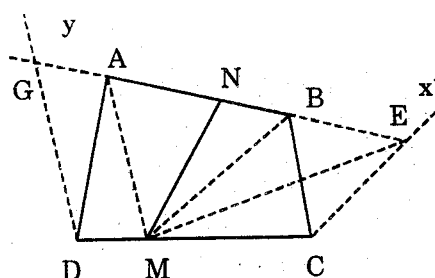
Cho tứ giác ABCD và một điểm M trên một cạnh của tứ giác. Dựng qua M một đường thẳng chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

GIẢI

Phân tích:

Giả sử M nằm trên cạnh CD của tứ giác và đường MN chia tứ giác ABCD thành hai phần có diện tích bằng nhau:

$S_{ADMN} = S_{BCMN}$



Ta kẻ MA, MB và đường Cx // MB cắt tia AB tại E và

đường Dy // MA cắt tia BA tại G. Ta có:

$S_{MAD} = S_{MAG}$ và $S_{MBC} = S_{MBE}$. Vì thế:

$S_{ADMN} = S_{MAN} + S_{MAD} = S_{MAN} + S_{MAG} = S_{MGN}$ (1)

$S_{BCMN} = S_{MNB} + S_{MBC} = S_{MNB} + S_{MBE} = S_{MNE}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có:

$S_{MNG} = S_{MNE}$, nghĩa là: N là trung điểm của GE.

Cách dựng:

1. Kẻ MA và MB.

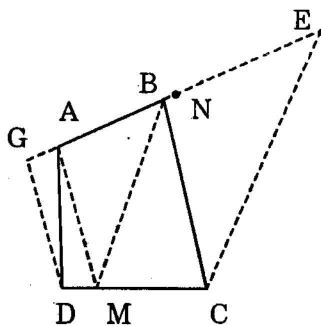
2. Kẻ Cx // MB cắt tia AB tại E và Dy // MA cắt tia BA tại G.

3. Xác định trung điểm N của GE.

Đường thẳng MN là đường cần dựng.

Chứng minh (dễ dàng)

Biện luận

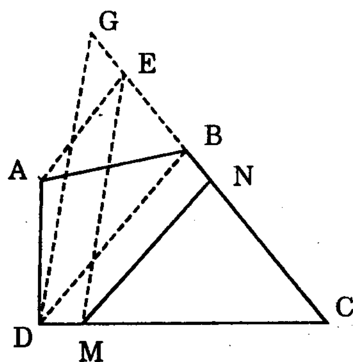


Đường thẳng MN là đường thẳng phải dựng chỉ khi điểm N *thuộc cạnh AB.*

Trong trường hợp ABCD và M như trong hình a, với phép dựng nói trên, điểm N (trung điểm của EG) ở ngoài cạnh AB, vì vậy phép dựng ấy không cho ta lời giải của bài toán. Trong trường hợp này, phải tìm điểm N ∈ BC hoặc N ∈ AD có thể như hình bên:

1. Dựng AE // DB

$S_{ECD} = S_{ABCD}$.



2. Dựng DG // ME

$$S_{ECD} = S_{GCM}.$$

Suy ra $S_{GCM} = S_{ABCD}$

3. Dựng trung điểm N của CG.

MN là đường thẳng cần dựng.

Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài 102

Các cạnh đối AB và DE, BC và EF, CD và FA của một lục giác lồi ABCDEF song song với nhau. Chứng minh rằng diện tích tam giác ACE bằng diện tích tam giác BDF.

(Đề thi vô địch toán Hungari, 1958)

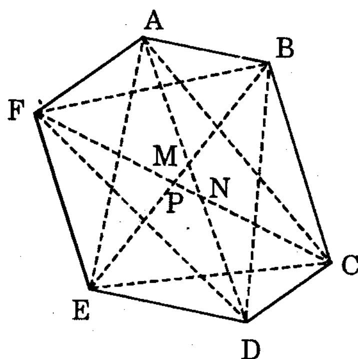
GỢI Ý:

Hãy chú ý:

$S_{ACE} = S_{ANC} + S_{AME} + S_{ENC} + S_{MNP}$

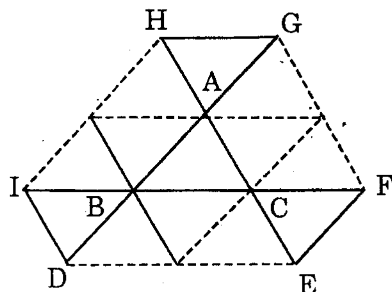
$S_{BFD} = S_{FDP} + S_{BMD} + S_{FNB} + S_{MNP}$

Hãy chứng minh các thành phần tương ứng trong hai tổng trên là bằng nhau.



Bài 103

Cho tam giác ABC có diện tích S. Dựng các tam giác AGH, EFC, DBI lần lượt đối xứng với ABC qua các điểm A, C, B. Tính diện tích lục giác DEFGHI theo S.



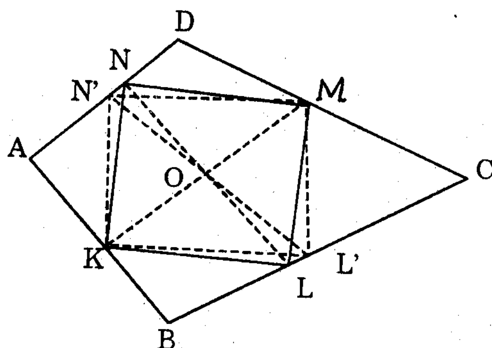
GỢI Ý:

Có thể kẻ qua A, B, C các đường thẳng tương ứng song song với cạnh đối diện của tam giác ABC. Chứng minh rằng ta được 13 tam giác bằng với tam giác ABC.

Bài 104

Gọi K và M là trung điểm của các cạnh AB và CD của một tứ giác lồi ABCD. L và N nằm trên hai cạnh kia của tứ giác sao cho KLMN là hình chữ nhật. Chứng minh rằng diện tích hình chữ nhật KLMN bằng một nửa diện tích tứ giác ABCD.

(Đề thi vô địch toán Liên Xô – 1981)



GỢI Ý:

Gọi L' là trung điểm của BC

N' là trung điểm của AD

Hãy chứng minh:

a) $S_{ABCD} = 2S_{KL'MN'}$

b) Trung điểm O của KM cũng là trung điểm của NL và N'L', suy ra AD // BC.

Bài 105

Cho hình vuông ABCD. Gọi K, O, E, N là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đoạn thẳng AO, BE, CN và DK cắt nhau tại L, M, R, P.

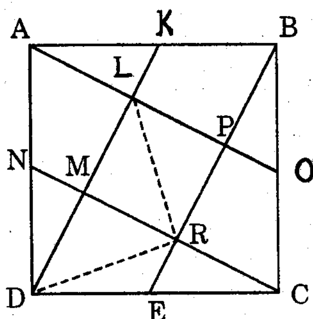
Tính tỉ số diện tích

$$S_{MLPR} : S_{ABCD}$$

GIẢI (vắn tắt)

Ta dễ dàng chứng minh được

– AL = LP = BP = PR = RC = = RM = DM = ML



– Tứ giác MLPR là hình vuông

$$S_{DMR} = S_{DRC}$$

$$S_{DMR} = S_{MRL}$$

Từ đây suy ra:

$$S_{DMC} = 2S_{MRL} = S_{MLPR}$$

Chứng minh tương tự, cuối cùng ta có:

$$S_{DMC} = S_{BRC} = S_{APB} = S_{ALD} = S_{MLPR}$$

cho ta:

$$\frac{S_{MLPR}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{5}$$

● *Ta sẽ* khai thác bài toán *này theo các hướng khác nhau:*

Hướng thứ nhất

Chú ý rằng trong chứng minh trên đây (và ngay cả trong

giả thiết của bài toán) các kiến thức có tính chất "chìa khóa" để giải bài toán liên quan đến vấn đề "trung điểm", *vấn đề* "song song".

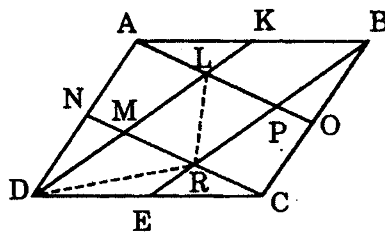
Do vậy, liệu bài toán còn đúng khi ta thay hình vuông ABCD bằng hình chữ nhật, hình bình hành không? Ta hãy đề ra và giải bài toán sau:

Bài 106

Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, O, E, N là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đoạn thẳng AO, BE, CN, và DK cắt nhau tại L, M, R, P.

Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} = 5S_{MLPR}.$$



GỢI Ý:

Xem lời giải bài 105.

Hướng thứ hai

Do việc chứng minh được PL = LA, LM = MD, MR = RC và RP = PB, ta nhận thấy các đỉnh của hình vuông ABCD có được bằng cách kéo dài các cạnh của hình vuông MLPR thêm những đoạn bằng cạnh của nó và theo một hướng xác định. Từ đây, ta có thể biến đổi bài 105 thành một bài toán mới.

Cho hình vuông ABCD, ta kéo dài các cạnh thêm một đoạn BE = AB; CF = BC, DH = DC, AK = DA.

Chứng minh

$$S_{EFHK} = 5S_{ABCD}.$$

Tương tự ta có:

$$S_{MNB} = 2S_{ABC}$$
$$S_{QAM} = 2S_{DAB}$$
$$S_{PCN} = 2S_{DBC}$$

Vậy:

$$S_{MNPQ} = S_{PDQ} + S_{MNB} + S_{QAM} + S_{PCN} + S_{ABCD}$$
$$= 2\,(S_{DAC} + S_{ABC}) + 2(S_{DAB} + S_{DBC}) + S_{ABCD}$$
$$= 2\,S_{ABCD} + 2S_{ABCD} + S_{ABCD} = 5S_{ABCD}.$$

Bài 108

Các điểm M, K, L nằm lần lượt trên các cạnh AC, AB, BC của tam giác đều ABC sao cho

$$AM = CL = BK = \frac{1}{3}AB.$$

Các đoạn thẳng AL, BM, CK cắt nhau tại các điểm D, E, F.

Chứng minh rằng:

a) $S_{DEF} = \frac{1}{7} S_{ABC}$

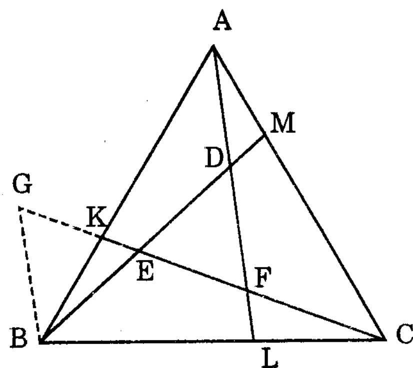
b) $S_{DEF} = 3S_{ADM}$

(Đề thi vô địch toán Hungari, 1942)

GỢI Ý:

Tìm cách chứng minh BE = DE.

Trước hết, chứng minh ΔDEF đều (suy từ ΔABD = ΔBCE = ΔCAF). Sau đó, có thể kẻ từ B đường song song với AD, cắt CK kéo dài ở G, có ΔBEG đều.



NHẬN XÉT:

Trong đề toán trên đây, bạn thử thay "tam giác đều" bởi "tứ giác đều" (hình vuông), và xét xem sẽ có kết quả gì. Ngược lại, trong các bài 105, 106, 107 bạn thử thay "tứ giác" bởi "tam giác" ("hình vuông" bởi "tam giác đều") và thử đề ra và giải các bài toán mới.

Bài 109

Cho tam giác ABC có diện tích bằng S. Trên cạnh AB ta lấy một điểm M và trên AC lấy một điểm N sao cho AM = 3BM và AN = 4CN. BN và CM cắt nhau ở điểm P. Hãy tính diện tích tam giác ABP.

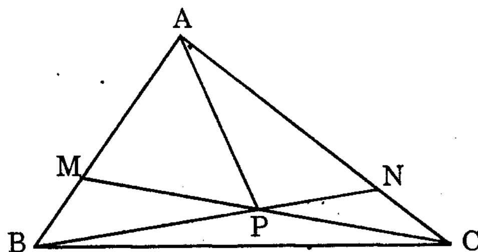
GIẢI (vắn tắt)

Đặt $S_{MPB} = x$, $S_{NPC} = y$

ta có $S_{ABP} = 4x$.

và có hệ:

$$\begin{cases} 4x + 4y = \dfrac{4}{5}S \\ 3x + 5y = \dfrac{3}{4}S \end{cases}$$



Giải hệ này ta có:

$$x = \frac{S}{8},$$

Vậy : $S_{ABP} = 4x = \dfrac{S}{2}$.

Bài 110

Trong những hình thoi có chu vi bằng nhau, tìm hình thoi có diện tích lớn nhất.

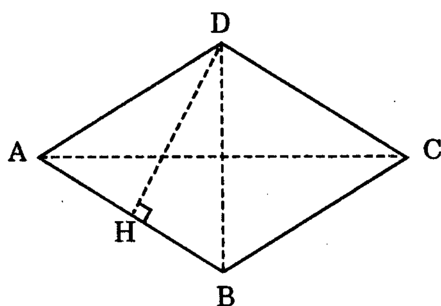
GIẢI

Ta biết diện tích hình thoi ABCD là:

$$S_{ABCD} = AB.DH$$

Trong tam giác vuông ADH thì $DH \leq AD$

nên $S_{ABCD} = AB.DH \leq AB.AD$



Mà AD = AB,

nên $S_{ABCD} \leq AB^2$.

Vậy S_{ABCD} có giá trị lớn nhất khi

$$S_{ABCD} = AB^2$$

tức là ABCD là hình vuông.

Kết luận:

Trong các hình thoi có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

Bạn thử chứng minh mệnh đề có liên quan sau đây:

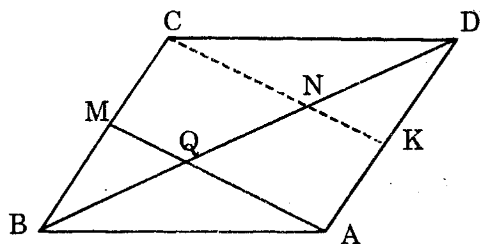
Trong các hình thoi có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Người ta chứng minh được rằng trong các kết luận trên, có thể thay "hình thoi" bởi "hình tứ giác bất kỳ".

Bài 111

Hình bình hành ABCD có diện tích bằng 1. Gọi M là trung điểm của BC; AM cắt BD ở Q. Tính S_{MQDC}.

GỢI Ý:



Gọi K là trung điểm của AD.

CK cắt BD ở N.

Ta chứng minh:

$$S_{BMQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{BCD}$$

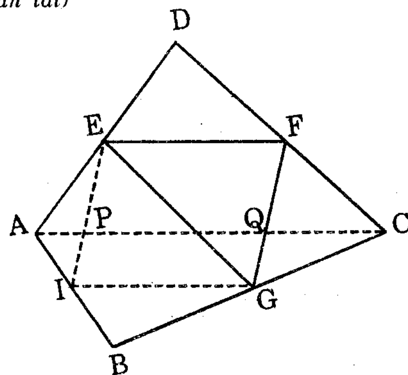
Đáp số: $S_{MQDC} = \frac{5}{12}$

Bài 112

Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, DC, CB.

Chứng minh rằng diện tích tam giác GEF bằng 1/4 diện tích tứ giác ABCD.

GIẢI (vắn tắt)



Gọi I là trung điểm của AB. Ta dễ dàng chứng minh được EFGI là hình bình hành và có:

$$S_{GEF} = \frac{1}{2} S_{EFGI}$$

Mặt khác: $S_{EDF} = \frac{1}{4} S_{DAC}$

$$S_{EDF} + S_{EAP} + S_{FQC} = \frac{1}{2} S_{ADC}$$

Tương tự: $S_{BIG} + S_{IAP} + S_{GQC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

Vì vậy: $S_{EFGI} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 113

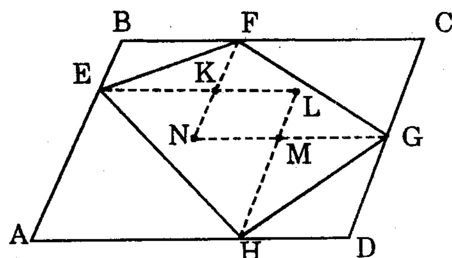
Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự nằm trên các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA.

Chứng minh rằng nếu diện tích tứ giác EFGH bằng một nửa diện tích ABCD thì ít nhất một trong các đường chéo của EFGH phải song song với một cạnh của hình bình hành.

GIẢI

Cách 1:

Từ các điểm E, F, G, H ta kẻ các đường song song với các cạnh của hình bình hành, các đường thẳng này cắt nhau tại các điểm K, L, M, N. Tứ giác KLMN là hình bình hành.



Ta có

$S_{EFK} = S_{EFB}$;

$S_{FNG} = S_{FCG}$;

$S_{GMH} = S_{GDH}$;

$S_{HLE} = S_{AEH}$.

Vậy

$S_{EFK} + S_{FNG} + S_{GMH} + S_{HLE} = S_{ABCD} - S_{EFGH} = S_{EFGH}$

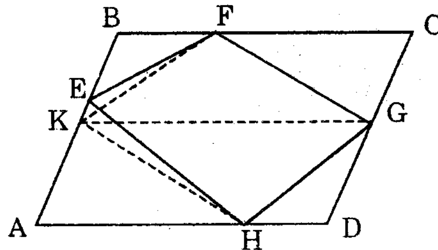
Điều này xảy ra khi và chỉ khi $S_{KLMN} = 0$

nghĩa là $LM \equiv NK \Rightarrow FH // AB$.

hoặc $KL \equiv NM \Rightarrow EG // BC$.

Cách 2: Chứng minh bằng phản chứng

Giả sử $S_{EFGH} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ nhưng cả FH và EG đều không song song với cạnh của hình bình hành. Qua điểm G kẻ đường GK // BC. Ta có



$S_{HGFK} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{HGFE}$.

$S_{FKH} = S_{FEH}$.

Hai tam giác này có chung đáy FH, có diện tích bằng nhau, suy ra EK // FH, kéo theo FH // AB. Điều này trái với giả thiết.

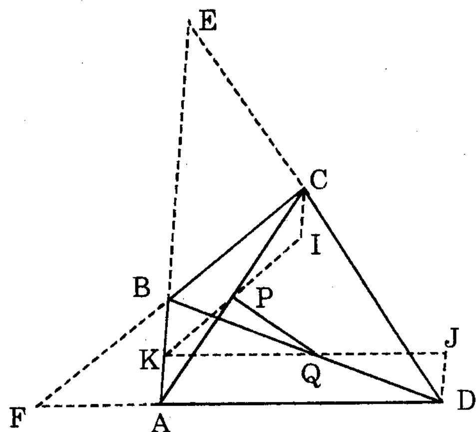
Bài 114

Cho tứ giác ABCD. Kéo dài các cạnh đối diện AB cắt DC ở E; AD cắt BC ở F. Gọi P, Q theo thứ tự là các trung điểm của các đường chéo AC và BD.

Chứng minh $S_{EPQ} = S_{FPQ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$

Gợi ý:

Hệ số $\frac{1}{4}$ gợi cho ta nghĩ đến các kết quả:



– Một đường trung bình tạo với hai cạnh bên của tam giác, một tam giác nhỏ có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích của tam giác lớn.

– Tam giác có đáy bằng một nửa cạnh của hình bình hành và chiều cao tương ứng bằng chiều cao của hình bình hành thì có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình bình hành.

Do vậy, ta tìm cách tạo ra các tam giác và các hình bình hành thích hợp.

Qua trung điểm K của AB, dựng các hình bình hành KBCI (KI = BC) và KADJ (KJ = AD).

Bài 115

ĐỊNH LÍ GAUSS

Bài toán trên đây cho ta kết quả là

$$S_{EPQ} = S_{FPQ} \qquad (1)$$

Gọi I là giao điểm của đường thẳng PQ với EF.

Kẻ EH ⊥ PQ và FK ⊥ PQ. Ta có

$$S_{EPQ} = \frac{1}{2}\ PQ.EH \qquad (2)$$

$$S_{FPQ} = \frac{1}{2}\ PQ.FK \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra EH = FK.

Từ đây Δ EHI = Δ FKI

$\Rightarrow$ IE = IF

hay I là trung điểm của đoạn thẳng EF.

Kết quả này là nội dung của định lí Gauss:

"Đường thẳng nối các trung điểm của hai đường chéo của một tứ giác lồi (không phải là hình thang hoặc hình bình hành) thì chia đôi đoạn thẳng nối giao điểm của các cặp đường thẳng chứa các cạnh đối diện".



Carl Gauss
(1777-1855)

Chú thích:

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Nhà toán học vĩ đại và nhà vật lí nổi tiếng người Đức

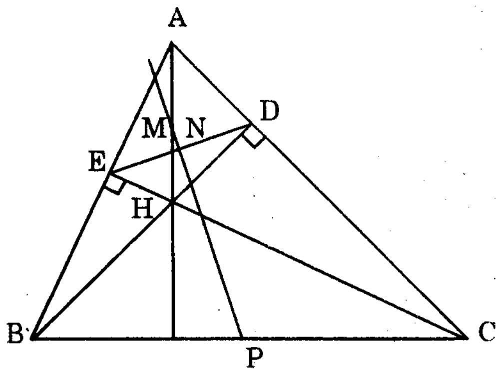
MỘT BÀI TOÁN ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ GAUSS

Bài 116

Cho tam giác ABC; các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M, N, P theo thứ tự là các trung điểm của các đoạn thẳng AH, DE và cạnh BC

Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

GỢI Ý:



Áp dụng định lí Gauss vào tứ giác ADHE.

Nhận xét:

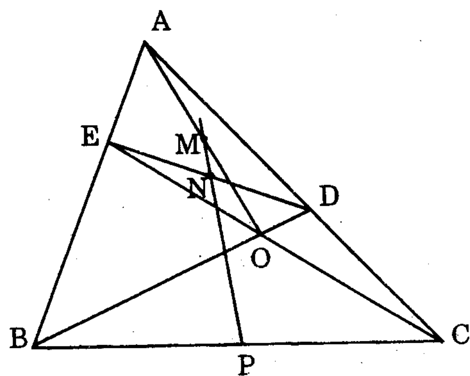
Với các giả thiết

BD ⊥ AC ; CE ⊥ AB

ta có thể giải bài toán này mà không dùng định lí Gauss. Áp dụng tính chất trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông, ta có ngay ME = MD, PE = PD. Điều này chứng tỏ hai điểm M, P đều nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng ED.

Tuy vậy, khi áp dụng định lí Gauss, ta không sử dụng gì đến các giả thiết BD ⊥ AC, CE ⊥ AB. Do vậy, ta nghĩ đến một bài toán tổng quát hơn, như sau:

"Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB có một điểm E, trên cạnh AC có một điểm D. Hai đoạn thẳng BD, CE cắt nhau tại điểm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là các trung điểm của các đoạn thẳng AO; ED; và cạnh BC. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng".



CHÚ Ý:

Khi điểm O trùng với trực tâm H của tam giác ABC thì ta trở lại với bài toán trên.

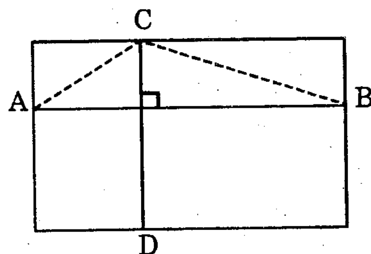
Bài 117

Cho một đa giác lồi chỉ chứa các tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

Chứng minh rằng đa giác đó có thể chứa trọn trong một đa giác có diện tích bằng 4.

GỢI Ý:

Trước hết, ta nhận xét rằng đây là một bài tập chứng minh khá đặc biệt. Bài tập này không phụ thuộc vào hình dạng cụ thể mà chỉ chú trọng đến quan hệ của các yếu tố hình học đã cho trong bài, ở đây là các độ lớn về diện tích. Hãy chú ý tới các số 1 và 4, có thể tạo nên hệ số 1/4 với các liên quan hình học ta đã gặp trong bài 114.



Sau đây là một cách giải (ngắn gọn)

Trong số các đoạn thẳng nằm gọn trong đa giác, ta chọn đoạn AB có độ dài lớn nhất. Gọi C là đỉnh của đa giác

cách xa AB nhất. Khi đó hình chữ nhật MNPQ có cạnh có độ lớn bằng AB và CD (D là điểm đối xứng của C qua AB) sẽ chứa trọn đa giác đã cho.

Vì $S_{ABC} \leq 1$ nên $S_{MNPQ} = 4S_{ABC} \leq 4$.

• MỘT SỐ BÀI TOÁN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

Bài 118

Chứng minh rằng trong một tam giác, chiều cao ứng với cạnh lớn có độ dài nhỏ hơn chiều cao ứng với cạnh nhỏ.

GIẢI

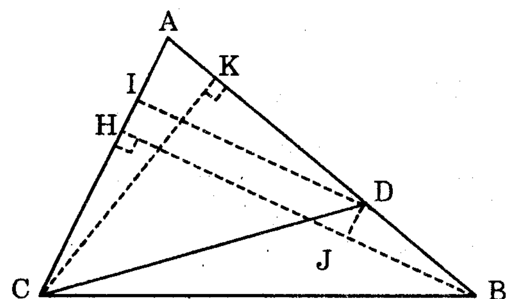
Giả sử ta có tam giác ABC, trong đó AB > AC, các đường cao tương ứng là BH, CK.

Ta phải chứng minh BH > CK.

Thật vậy ta có:

$BH.AC = CK.AB$

$= 2S_{ABC}$



$$\frac{BH}{CK} = \frac{AB}{AC} > 1$$

(vì AB > AC)

Do đó: BH > CK.

CHÚ Ý: Ta có thể giải bài này theo cách khác, như sau:

Do AB > AC nên có thể lấy trên AB một điểm

D sao cho AD = AC. Từ D kẻ DI ⊥ AC. Ta có Δ ADC cân đỉnh A nên

$$CK = DI \qquad (1)$$

Từ D kẻ DJ ⊥ HB; vì D nằm giữa hai điểm A, B nên điểm J phải nằm giữa hai điểm H, B, do vậy ta có:

$$HJ < BH \qquad (2)$$

Mặt khác tứ giác DIHJ là hình chữ nhật nên

$$DI = HJ \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra CK < BH.

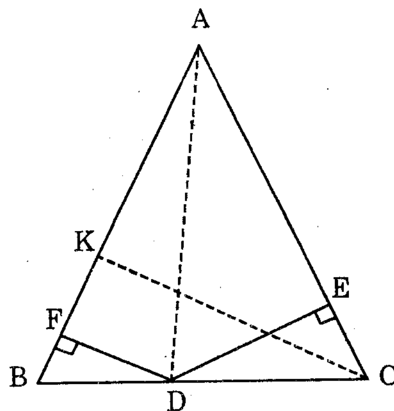
Các bạn hãy so sánh hai cách giải để thấy ưu điểm của phương pháp diện tích trong trường hợp này và tìm thêm bài toán thích hợp trong đó phương pháp diện tích tỏ ra có ưu điểm.

Bài 119

Cho tam giác ABC cân, đỉnh A. Một điểm D di chuyển trên cạnh đáy BC. Từ D kẻ các đường DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB. Chứng minh rằng tổng DE + DF không phụ thuộc vào vị trí của điểm D trên BC.

GIẢI

Để chứng minh DE + DF không phụ thuộc vị trí của điểm D, ta chứng minh nó luôn luôn bằng một đại lượng không đổi.



Kẻ đường cao CK ta có:

$S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC}$

2.AB .DF + 2.AC . DE = = 2.AC .CK

Vì AB = AC nên:

(DE + DF) AC = AC.CK

DE + DF = CK

Bài 120

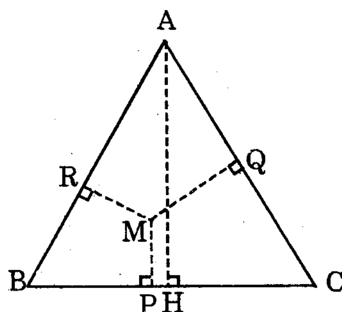
Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm thuộc miền trong của một tam giác đều đến ba cạnh của nó không phụ thuộc vào vị trí của điểm ấy.

GỢI Ý:

Từ :

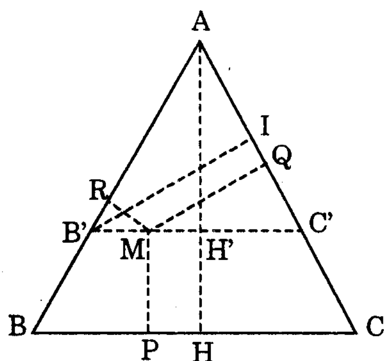
$S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC} = S_{ABC}$

Suy ra MR + MQ + MP = AH = không đổi.



CHÚ Ý: 1. Có thể giải bài này không sử dụng đến các kiến thức về diện tích.

Kẻ qua M đường thẳng song song với cạnh BC để có:



MP = HH'

MR + MQ = B'I = AH'

MR + MQ + MP = AH' + H'H = AH

2. Hãy mở rộng bài toán và chứng minh cho trường hợp một *đa giác đều*.

3. Hãy chứng minh rằng kết quả cũng đúng với một hình *đa giác có các cạnh bằng nhau* (chẳng hạn hình thoi) hoặc với một *đa giác có các góc bằng nhau* (chẳng hạn hình chữ nhật).

Bài 121

Cho tam giác ABC, với AB = c, AC = b (b > c); M là trung điểm của cạnh BC.

1. Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến cạnh AC nhỏ hơn khoảng cách từ M đến cạnh AB.

2. Gọi khoảng cách từ M đến cạnh AC là d. Cho $\widehat{A} = 90^\circ$. Chứng minh hệ thức

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài 122

Chứng minh định lí:

"Trong một tam giác, chân đường phân giác trong của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề của góc ấy".

GỢI Ý:

Gọi D là chân đường phân giác của góc A.

Cần chứng minh

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

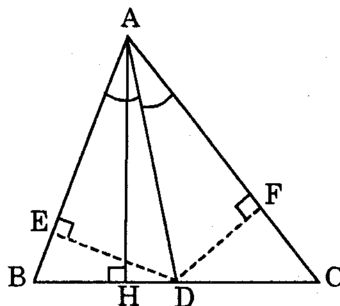
Ta có

$S_{ABD} = \frac{1}{2}$ DB.AH $= \frac{1}{2}$ AB.DE. (1)

$S_{ACD} = \frac{1}{2}$ DC. AH $= \frac{1}{2}$ AC.DF (2)

mà DE = DF (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.



Bài 123

Trong một tam giác, gọi h_a là đường cao ứng với cạnh a và h_b là đường cao ứng với cạnh b.

Chứng minh rằng nếu a > b thì

$$a + h_a \geq b + h_b$$

Hãy xác định khi nào thì có dấu đẳng thức.

(Trích đề thi vô địch toán Anh, 1967)

GỢI Ý:

Gọi S là diện tích của tam giác

$$2S = ah_a = bh_b$$

Chú ý rằng $h_a \leq b$ vì $2S \leq ab$.

$$a + h_a - (b + h_b) = a + \frac{2S}{a} - \left(b + \frac{2S}{b}\right)$$

$$= (a - b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 2S = ab tức là hai cạnh đã cho vuông góc với nhau.

Tam giác đã cho vuông góc tại đỉnh C.

• NGỤY BIỆN TOÁN HỌC

Chúng ta đã nghe nói đến ngụy biện toán học. Vậy ngụy biện toán học là gì? Trước hết ta hãy làm quen với ngụy biện qua một số vĩ dụ cụ thể trong phạm vi kiến thức của chương trình Hình học lớp 8.

Bài 123

Trong một tam giác, gọi h_a là đường cao ứng với cạnh a và h_b là đường cao ứng với cạnh b.

Chứng minh rằng nếu $a > b$ thì

$$a + h_a \geq b + h_b$$

Hãy xác định khi nào thì có dấu đẳng thức.

(Trích đề thi vô địch toán Anh, 1967)

GỢI Ý:

Gọi S là diện tích của tam giác

$$2S = ah_a = bh_b$$

Chú ý rằng $h_a \leq b$ vì $2S \leq ab$.

$$a + h_a - (b + h_b) = a + \frac{2S}{a} - \left(b + \frac{2S}{b}\right)$$

$$= (a - b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2S = ab$ tức là hai cạnh đã cho vuông góc với nhau.

Tam giác đã cho vuông góc tại đỉnh C.

• NGỤY BIỆN TOÁN HỌC

Chúng ta đã nghe nói đến ngụy biện toán học. Vậy ngụy biện toán học là gì? Trước hết ta hãy làm quen với ngụy biện qua một số ví dụ cụ thể trong phạm vi kiến thức của chương trình Hình học lớp 8.

1. Một số bài toán ngụy biện quen thuộc

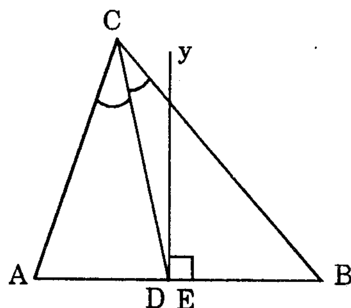
Bài 1

Chứng minh mệnh đề: "Mọi tam giác đều cân"

Chứng minh

Giả sử cho tam giác bất kì ABC.

Ta sẽ chứng minh rằng luôn luôn có: AC = CB.



Ta kẻ đường phân giác Cx của góc C và kẻ đường trung trực Dy của cạnh AB. Gọi giao điểm của Cx và Dy là điểm E. Ta xét ba trường hợp có thể có:

Trường hợp 1:

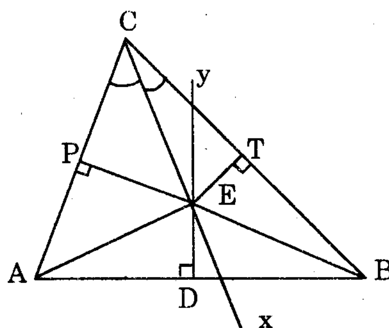
Điểm E nằm trên cạnh AB tức là E ≡ D.

Tam giác CAB có CD vừa là phân giác, vừa là trung tuyến, vậy CAB cân: CA = CB.

Trường hợp 2:

Điểm E thuộc miền trong của ABC

Từ E kẻ EF ⊥ CA và ET ⊥ CB.



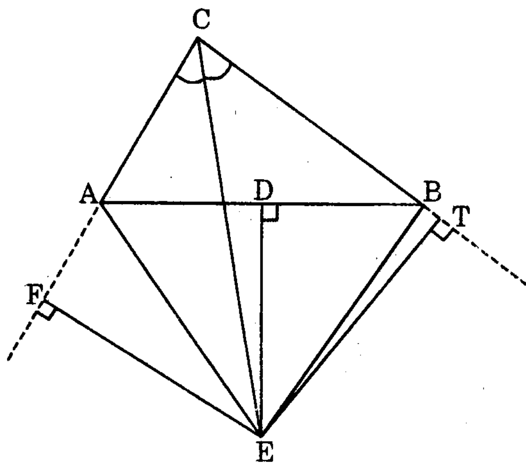
ta có

$\Delta CEF = \Delta CET \Rightarrow CF = CT$

$\Delta EFA = \Delta ETB \Rightarrow FA = TB$

$CF + FA = CT + TB$

$CA = CB.$



Trường hợp 3:

Điểm E nằm ngoài tam giác ABC. Chứng minh như trong các trường hợp trên ta có:

$\Delta\ CEF = \Delta\ CET$

$CF = CT$

$\Delta\ AFE = \Delta\ BTE \Rightarrow AF = BT$

Trừ hai đẳng thức trên vế với vế, ta có:

$CF - AF = CT - BT$

$CA = CB$

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có CA = CB (đpcm)

CHÚ Ý: Hoàn toàn tương tự, ta có thể "chứng minh" được các mệnh đề:

– Tam giác nào cũng là tam giác đều.

– Trong một hình tam giác vuông, cạnh huyền bằng cạnh góc vuông.

(Các bạn thử lặp lại lí luận trên đây).

Bài 2

Chứng minh mệnh đề:

"Trong một tam giác vuông, cạnh góc vuông bao giờ cũng lớn hơn cạnh huyền"

Chứng minh

Xét tam giác vuông ACB.

Ta có:

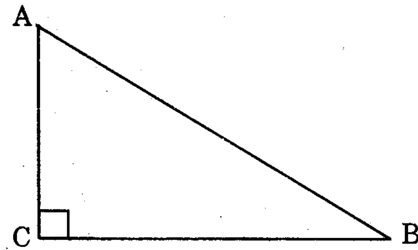
$AB^2 - BC^2 =$

$= (AB - BC)(AB + BC)$

Mặt khác:

$AB^2 - BC^2 =$

$- (BC - AB)(AB + BC)$



Vậy:

$(AB - BC)(AB + BC) = -(BC - AB)(AB + BC)$

Chia cả hai vế của đẳng thức này cho biểu thức khác 0:

$-(AB + BC)(AB - BC)$, *ta được:*

$$\frac{(AB - BC)(AB + BC)}{-(AB + BC)(AB - BC)} = \frac{-(BC - AB)(AB + BC)}{-(AB + BC)(AB - BC)}$$

$$\frac{AB + BC}{-(AB + BC)} = \frac{BC - AB}{AB - BC}$$

Ta nhận thấy ở vế trái có:

$AB + BC > 0$ *còn* $-(AB + BC) < 0$ *cho nên:*

$AB + BC > -(AB + BC)$, *do đó ta cũng có:*

$BC - AB > AB - BC$

$2BC > 2AB \Rightarrow BC > AB$ *(đpcm)*

Bài 3

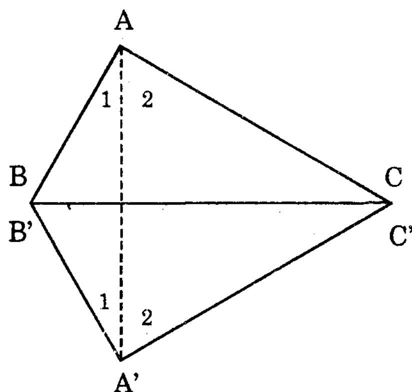
Trường hợp bằng nhau thứ tư của tam giác.

Chứng minh mệnh đề:

"Hai tam giác bằng nhau nếu chúng có hai cạnh bằng nhau

từng đôi một và một góc đối diện với một trong hai cạnh ấy bằng nhau"

Chứng minh



Giả sử có hai tam giác ABC và A'B'C', có:

$AB = A'B'$

$BC = B'C'$

$\hat{A} = \hat{A'}$

Ta chứng minh:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

Ta đặt tam giác ABC và tam giác A'B'C' ở vị trí sao cho B'C' trùng khít với BC (Xem hình).

Như vậy $\Delta ABA'$ *cân (vì AB = A'B'), cho ta* $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$

Ta lại có:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_2 = \hat{A} - \hat{A}_1 \\ \hat{A}'_2 = \hat{A}' - \hat{A}'_1\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}'_2$$

$\Delta ACA'$ *cân, cho ta AC = A'C'*

Hai tam giác ABC và A'B'C' có AB = A'B', BC = B'C' (theo giả thiết) và AC = A'C' (chứng minh trên)

Vậy $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ *(Trường hợp c.c.c)*

Bài 4

Chứng minh: "Góc vuông bằng góc tù"

Ta xét một tứ giác ABCD trong đó ta có:

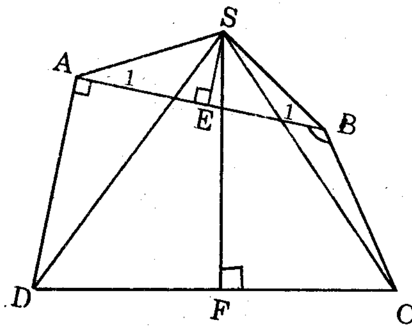
$\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} > 90^o$ ($\widehat{B}$ tù) $AD = BC$

Ta kẻ các đường trung trực của các cạnh AB, DC. Các trung trực này cắt nhau tại một điểm S. Ta có:

$SA = SB$

$SC = SD$

$AD = BC$



Vậy:

$\Delta SAD = \Delta SBC$ (c.c.c)

nên $\widehat{SAD} = \widehat{SBC}$ (1)

Mặt khác, ta có ΔSAB *cân nên* $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (2)

Trừ (1) cho (2) vế với vế:

$$\widehat{SAD} - \widehat{A}_1 = \widehat{SBC} - \widehat{B}_1$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$$

Vậy ta có góc vuông DAB bằng góc tù ABC.

2. *Ngụy biện toán học là gì?*

Ngụy biện toán học là một trường hợp riêng của các sai lầm trong lí luận toán học. Ngụy biện toán học thường được trình bày dưới dạng một mệnh đề sai rõ ràng nhưng người ta lại "chứng minh" được tính "đúng đắn" của nó. Trong quá

Bài 4

Chứng minh: "Góc vuông bằng góc tù"

Ta xét một tứ giác ABCD trong đó ta có:

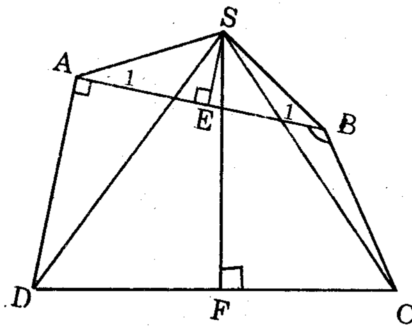
$\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} > 90^o$ ($\widehat{B}$ *tù*) $AD = BC$

Ta kẻ các đường trung trực của các cạnh AB, DC. Các trung trực này cắt nhau tại một điểm S. Ta có:

$SA = SB$

$SC = SD$

$AD = BC$



Vậy:

$\Delta SAD = \Delta SBC$ *(c.c.c)*

nên $\widehat{SAD} = \widehat{SBC}$ *(1)*

Mặt khác, ta có ΔSAB *cân nên* $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ *(2)*

Trừ (1) cho (2) vế với vế:

$$\widehat{SAD} - \widehat{A}_1 = \widehat{SBC} - \widehat{B}_1$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$$

Vậy ta có góc vuông DAB bằng góc tù ABC.

2. Ngụy biện toán học là gì?

Ngụy biện toán học là một trường hợp riêng của các sai lầm trong lí luận toán học. Ngụy biện toán học thường được trình bày dưới dạng một mệnh đề sai rõ ràng nhưng người ta lại "chứng minh" được tính "đúng đắn" của nó. Trong quá

trình "chứng minh", nguồn gốc của sai lầm được che đậy một cách tinh vi, khéo léo bằng cách dựa vào những xuất phát điểm là những chân lí toán học đã được khẳng định, hoặc bằng những lí luận lắt léo, dẫn dắt loanh quanh nhằm đánh lạc hướng người đọc. Về cơ bản, các ngụy biện toán học thường được cấu tạo trên các cơ sở sau:

a) Cố tình bỏ quên các điều kiện cần thiết khi vận dụng các định lí, quy tắc, công thức, hoặc mở rộng một cách vô nguyên tắc các khái niệm trong các trường hợp ngoại lệ hoặc tiến hành các phép biến đổi không tương đương.

b) Sử dụng các phát biểu không chặt chẽ, thiếu chính xác để diễn đạt nội dung các khái niệm, các quy tắc, các định lí, tìm cách đánh tráo mệnh đề phải chứng minh.

c) Đặc biệt trong hình học thì các ngụy biện thường dựa vào việc tạo ra những hình vẽ sai:

– Các điểm trùng nhau vẽ thành các điểm phân biệt.

– Các điểm phân biệt vẽ thành các điểm trùng nhau.

– Xác định sai vị trí các điểm (lấy ở chỗ mà nó không thể có được)

– Vẽ giao điểm của các đường mà thực ra không cắt nhau.

v.v...

3. Bác bỏ một ngụy biện toán học

Để bác bỏ một ngụy biện toán học, ta phải chỉ rõ những sai phạm ở một trong những khâu chủ yếu sau đây:

a) Mệnh đề phải "chứng minh" nêu ra đã rõ ràng chưa, có chỗ nào mập mờ, cố tình lập lờ giữa các khái niệm, trong quá trình "chứng minh" có đánh tráo mệnh đề phải chứng minh bằng một mệnh đề khác không.

b) Kiểm tra kĩ lưỡng các kiến thức dùng để "chứng minh", nhất là nội dung các định nghĩa, định lí, các công thức, các quy tắc đã được hiểu một cách thật chính xác, chặt chẽ chưa, có chỗ nào vượt ra ngoài giới hạn vận dụng các công thức, các quy tắc không v.v...

c) Kiểm tra lại các quy tắc suy luận được vận dụng, nhất là các phương pháp khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự, phương pháp quy nạp không hoàn toàn, v.v...

Trong các ngụy biện hình học thì điều quan trọng là vấn đề vẽ hình. Ta có thể bác bỏ các ngụy biện trên cơ sở hình vẽ, bằng cách:

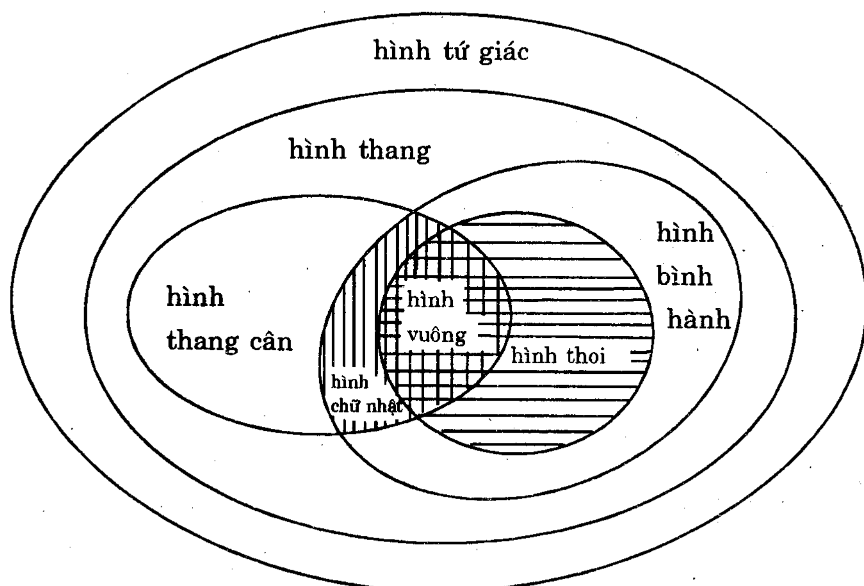
– Chỉ rõ rằng hình vẽ dùng trong ngụy biện là sai. Ta chứng minh *rằng không thể vẽ được một hình như vậy trong các điều kiện của bài toán (chẳng hạn xét các ví dụ trong các bài 1, bài 4)*

– Chỉ ra một trường hợp hình vẽ mà trong đó phán đoán đã nêu là sai (ví dụ trong bài 3)

Tuy nhiên, trong một số trường hợp, việc bác bỏ các ngụy biện không đơn giản chút nào. Thí dụ việc chứng minh một hình vẽ phải là thế này mà không thể khác được đôi khi có những khía cạnh rất tinh tế.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. MỐI QUAN HỆ giữa tập hợp các hình tứ giác – hình thang – hình thang cân – hình bình hành – hình chữ nhật – hình thoi – hình vuông có thể minh họa qua sơ đồ sau đây:



Ta thấy:

– Tập hợp V các hình vuông là *tập hợp con* của tập hợp T các hình thoi (V ⊂ T). Đồng thời V cũng là tập hợp con của tập hợp C các hình chữ nhật (V ⊂ C), nghĩa là V là *giao của hai tập hợp* T và C (V = T ∩ C). Do đó hình vuông có mọi tính chất của hình thoi và mọi tính chất của hình chữ nhật.

– Tương tự như vậy, C là giao của hai tập hợp: tập hợp Tc các hình thang cân và tập hợp B các hình bình hành: C = Tc ∩ B; do đó hình chữ nhật có mọi tính chất của hình thang cân và mọi tính chất của hình bình hành.

– T là tập hợp con của B (T ⊂ B), hình thoi có mọi tính chất của hình bình hành.

v.v...

II. TÓM TẮT TÍNH CHẤT CỦA CÁC HÌNH TỨ GIÁC

1. Tính chất về cạnh

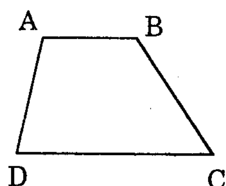
– Hình thang ABCD:

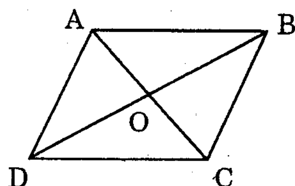
AB // CD *hoặc* AD // BC

– Hình bình hành ABCD (thoi, chữ nhật, vuông)

AB // CD *và* AD // BC

AB = CD *và* AD = BC





2. Tính chất về góc

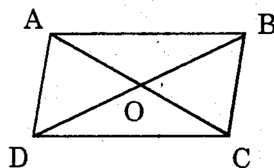
– Hình thang ABCD (AB // CD):

$\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$

– Hình bình hành ABCD (thoi, chữ nhật, vuông)

$\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{D} + \widehat{C}$

$= \widehat{B} + \widehat{A} = 180^o$



– Hình chữ nhật (vuông):

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^o$

3. Tính chất về đường chéo

– Hình bình hành (thoi, chữ nhật, vuông):

OA = OC và OB = OD

H. thoi (vuông):

AC ⊥ BD

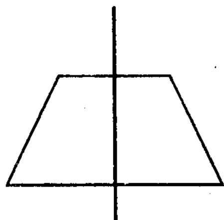
– H. thang cân (chữ nhật, vuông):

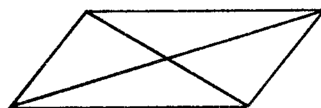
AC = BD

4. Tính chất đối xứng

– Hình thang cân có một trục đối xứng (đi qua trung điểm hai đáy – vuông góc với hai đáy)

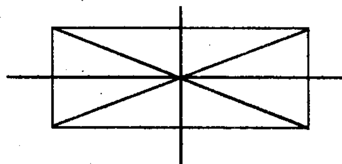
– Hình bình hành có một tâm đối xứng (giao điểm của hai đường chéo)

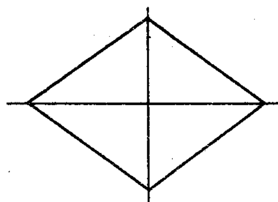


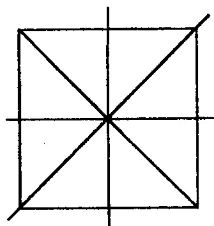


– Hình chữ nhật có hai trục đối xứng (vuông góc với cạnh) và một tâm đối xứng.

– Hình thoi có hai trục đối xứng (qua đỉnh) và một tâm đối xứng.







– Hình vuông có 4 trục đối xứng và một tâm đối xứng.

$$= \widehat{B} + \widehat{D} + \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} - 180^0$$

Vậy $\widehat{EKM} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2}$.

Bài 125

Cho một tứ giác lồi ABCD, trong đó AB + BD không lớn hơn AC + CD. Chứng minh rằng AB < AC.

(Đề thi vô địch toán Hungari, 1954)

GIẢI

Gọi giao điểm của AC và BD là O. Trong tam giác AOB, ta có:

$AB < AO + OB$ (1)

Trong tam giác COD, ta có:

$CD < CO + OD$ (2)

Từ (1) và (2), ta có:

$AB + CD < (AO + OC) + (BO + OD)$

$AB + CD < AC + BD$ (3)

Theo giả thiết:

$$AB + BD \le AC + CD \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra AB < AC (đpcm).

Bài 126

Cho tam giác ABC cân, đỉnh A. Lấy các điểm E, K lần lượt trên các tia AB và AC sao cho:

$$AE + AK = AB + AC$$

Chứng minh: BC < EK

(Đề thi vô địch toán nước Cộng hòa Secbi)

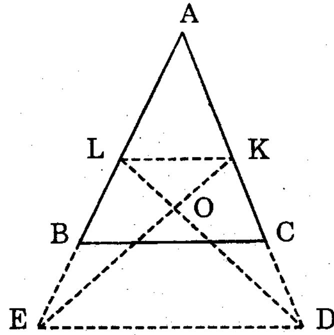
GIẢI

Lấy trên AB một điểm L sao cho

AL = AK

Lấy trên AC một điểm D sao cho

AD = AE.



Rõ ràng các tam giác ALK và AED là những tam giác cân có chung góc ở đỉnh A nên các góc đáy của chúng bằng nhau. Suy ra LK // ED, do đó DELK là hình thang cân, có các đường chéo bằng nhau.

DL = EK (1)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo DL và EK, ta xét tổng:

EK + DL = (EO + OK) + (DO + OL)

= (EO + OD) + (OK + OL)

Từ (1) và đẳng thức cuối cùng này, ta có:

2EK = (EO + OD) + (OK + OL) (2)

Nhưng trong tam giác OKL, ta có:

OK + OL > LK (3)

Trong Δ DEO: EO + OD > ED (4)

Từ (2), (3) và (4): 2 EK > LK + ED (5)

Từ giả thiết: AE + AK = AB + AC

suy ra BE = CK.

Mặt khác dễ thấy BCDE là hình thang cân nên

$$BE = CD$$

Vậy $$DC = CK.$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được B là trung điểm của EL.

Từ đó, BC là đường trung bình của hình thang DELK, suy ra:

$$LK + ED = 2BC \qquad (6)$$

Từ (5) và (6), ta có: EK > BC (đpcm).

Bài 127

Cho tứ giác ABCD. Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Các cạnh AD và BC kéo dài cắt nhau tại P.

Biết rằng AC ⊥ AD và DB ⊥ CB,

a) Chứng minh rằng đường thẳng d qua các trung điểm của PO và CD là trục đối xứng của cạnh AB.

b) Tứ giác ABCD phải có điều kiện gì để d và PO trùng nhau?

GIẢI

a) Gọi I là trung điểm của PO

J là trung điểm của AB

K là trung điểm của CD

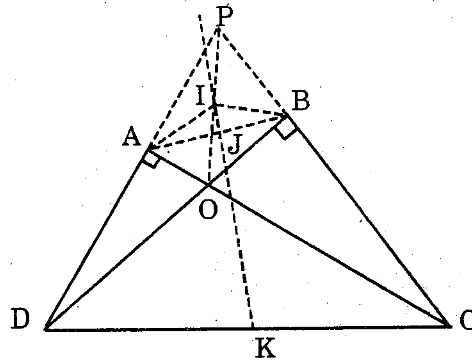
Các tam giác APO và BOP vuông tại A và B (theo giả thiết) do đó:

$$AI = BI = \frac{PO}{2}$$

(trung tuyến từ đỉnh góc vuông). Vậy I cách đều A và B hay I nằm trên đường trung trực của AB. Từ các tam giác vuông ADC và DBC

ta cũng có:

KA = KB, suy ra K ở trên đường trung trực của AB. Vậy đường thẳng d qua IK là trục đối xứng của AB.



b) Khi PO trùng với d thì năm điểm P, I, J, O, K thẳng hàng.

Lúc đó PK là đường cao thứ ba của tam giác PCD (PK qua giao điểm O của hai đường cao DB và AC), mà KC = KD (giả thiết) nên PK là trục đối xứng của CD.

Như vậy AB và CD cùng có trục đối xứng là d (qua IK và PK), nên tứ giác ABCD là *hình thang cân.*

CHÚ Ý: Xem lại bài 115 – Định lí Gauss.

Bài 128

Cho tam giác ABC. Gọi P và Q là chân các đường vuông góc kẻ từ đỉnh A đến các phân giác trong và phân giác ngoài của B; R và S là chân các đường vuông góc kẻ từ đỉnh A đến các đường phân giác trong và ngoài của góc C.

a) Xác định hình dạng các tứ giác APBQ, ARCS.

b) Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, R, S thẳng hàng.

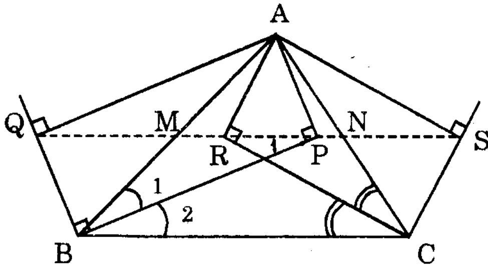
c) Chứng minh rằng độ dài đoạn thẳng QS bằng một nửa chu vi tam giác ABC.

d) Tìm điều kiện cho tam giác ABC để tứ giác APBQ là hình vuông.

e) Nếu hai tứ giác APBQ và ARCS là những hình chữ nhật bằng nhau thì tam giác ABC phải có đặc điểm gì?

f) Có thể xảy ra trường hợp cả hai tứ giác APBQ và ARCS đều là hình vuông được không?

GỢI Ý:



b) ABPQ là hình chữ nhật, do đó:

PQ qua trung điểm M của AB:

$\widehat{P}_1 = \widehat{B}_1$ (BMP cân).

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

$\widehat{P}_1 = \widehat{B}_2$

PQ // BC

P và Q nằm trên đường thẳng chứa đường trung bình của tam giác ABC. Chứng minh tương tự với RS.

c) $QM = AM = \dfrac{AB}{2}$, $MN = \dfrac{BC}{2}$, $NS = AN = \dfrac{AC}{2}$

d) $PQ \perp AB$, tam giác ABC vuông tại B.

f) Không thể xảy ra, vì ABC không thể vừa vuông ở A, vừa vuông ở C.

NHẬN XÉT VỀ PHƯƠNG PHÁP:

Trong câu b) ta đã chứng minh bốn điểm P, Q, R, S, thẳng hàng bằng cách chứng minh chúng nằm cùng trên đường thẳng chứa đường trung bình MN.

Muốn chứng minh nhiều điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng nằm trên một đường thẳng nào đó.

Bài 129

Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC và M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AD, AE, EF, FD.

1. Chứng minh các tứ giác ADFE, MNPQ là hình bình hành

2. Các tứ giác ADFE, MNPQ là hình gì khi tam giác ABC vuông góc, đỉnh A?

3. Các tứ giác ADFE, MNPQ là hình gì khi tam giác ABC cân, đỉnh A?

4. Trường hợp nào ta có ADFE, MNPQ là hình vuông?

Bài 130

Cho một hình vuông ABCD. Trên tia đối của CB ta lấy một điểm M, trên tia đối của DC lấy điểm N sao cho DN = BM. Đường thẳng song song với AN kẻ từ M và đường thẳng song song với AM kẻ từ N cắt nhau ở điểm F.

a) Chứng minh rằng tứ giác ANFM là hình vuông;

b) Chứng minh rằng điểm F nằm trên đường phân giác của góc MCN;

c) Chứng minh rằng AC vuông góc với CF;

d) Gọi O là trung điểm của AF. Chứng minh rằng ba điểm B, D, O thẳng hàng và tứ giác BOFC là hình thang.

GIẢI (vắn tắt)

a) Các tam giác AMB, NAD bằng nhau, cho ta

$$AN = AM$$

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$$

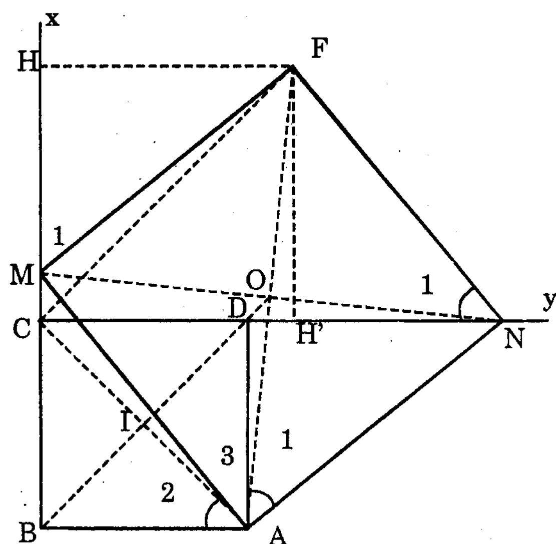
$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 90^o$$

Vậy hình bình hành ANFM là hình vuông.

b) Kẻ $FH \perp Cx$

$FH' \perp Dy$

$$\begin{cases} \widehat{M}_1 = \widehat{A}_2 \\ \widehat{N}_1 = \widehat{A}_1 \end{cases} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 \Rightarrow \Delta MFH = \Delta NFH'$$



$\Rightarrow$ FH = FH'.

Điểm F cách đều hai cạnh Cx, Cy của góc MCN nên nằm trên đường phân giác của góc ấy.

c) Kết quả trên cho ta:

$\widehat{FCA} = \widehat{FCN} + \widehat{NCA} = 90^o \Rightarrow AC \perp CF$

d) Ta có:

$$OC = OA$$

$$DC = DA$$

$$BC = BA$$

Vậy ba điểm O, D, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AC. Vậy chúng thẳng hàng.

Mặt khác, ta có:

$$\left.\begin{matrix} OB \perp AC \\ CF \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OB // CF$$

Vậy BOFC là hình thang.

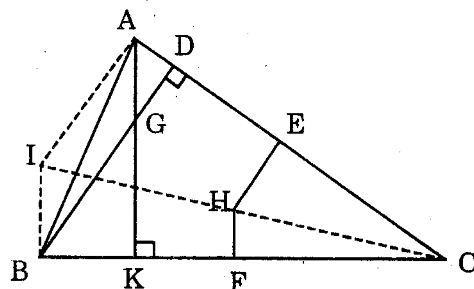
Bài 131

Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại G. Vẽ đường trung trực HE, HF của AC và BC. Chứng minh rằng: BG = 2HE và AG = 2 HF.

(Đề thi học sinh giỏi toán 8, Hà Nội 1980 – 1981)

GỢI Ý:

Để tận dụng giả thiết E, F là các trung điểm của AC và BC ta dựng các tam giác phụ mà HE, HF là các đường trung bình, rồi so sánh đáy các tam giác này với các đoạn thẳng đang quan tâm...



GIẢI

Lấy I đối xứng với C qua H, kẻ AI và BI. Ta có HE là đường trung bình của Δ ACI, nên:

$$HE \parallel IA \text{ và } HE = \frac{IA}{2} \quad (1)$$

Tương tự, trong Δ CBI:

$$HF \parallel IB \text{ và } HF = \frac{IB}{2} \quad (2)$$

Từ BG ⊥ AC và HE ⊥ AC suy ra BG // IA (3)

Tương tự: AK ⊥ BC và HF ⊥ BC suy ra AG // IB (4)

Từ (3) và (4) suy ra BIAG là hình bình hành.

Do đó

$$BG = IA \text{ và } AG = IB.$$

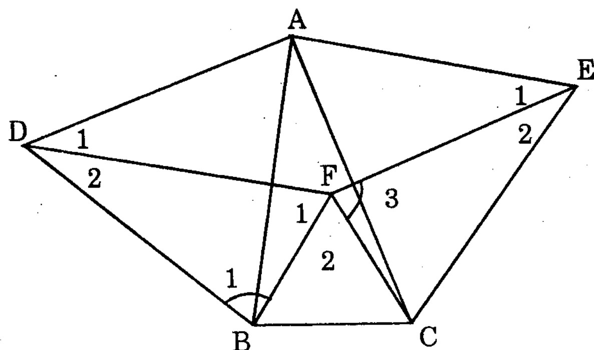
Kết hợp với các kết quả (1) và (2), suy ra

BG = 2 HE và AG = 2 HF (đpcm).

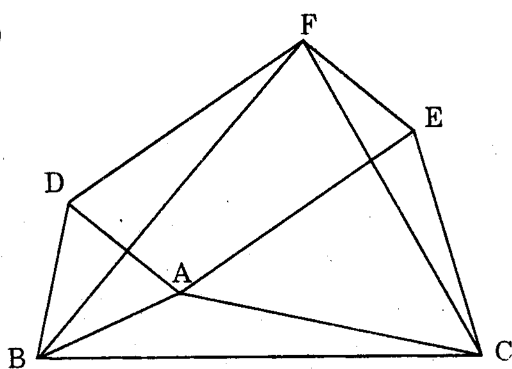
Bài 132

Lấy hai cạnh AB và AC của Δ ABC (góc BAC ≠ 60°); dựng ra phía ngoài góc A hai tam giác đều ABD và ACE. Lấy AD và AE làm hai cạnh dựng hình bình hành ADFE. Chứng minh rằng tam giác FBC là tam giác đều.

(Đề thi vào cấp 3 chuyên toán, Hà Nội 1980)



a)



b)

GIẢI

Ta chứng minh FBC là tam giác cân có một góc bằng 60^0. Xét hai trường hợp: $\widehat{BAC} < 60^0$ và $\widehat{BAC} > 60^0$.

a) $\widehat{BAC} < 60^0$ (hình a)

Xét hai tam giác DFB và ECF. Ta có:

DF = EC (cùng bằng AE)

DB = FE (cùng bằng DA)

$\widehat{D}_2 = \widehat{E}_2$ ($\widehat{D}_2 = 60^\circ - \widehat{D}_1$, $\widehat{E}_2 = 60^\circ - \widehat{E}_1$ mà $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$).

Do đó:

Δ DFB = Δ EFC $\Rightarrow$ FB = FC (1)

và $\widehat{F}_3 = \widehat{B}_1$ (2)

Trong Δ DFB, ta có $\widehat{F}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{D}_2 = 180^\circ$.

Thay (2) vào, ta được $\widehat{F}_1 + \widehat{F}_3 + \widehat{D}_2 = 180^\circ$. (3)

Trong hình bình hành ADFE thì $\widehat{F}_4 + \widehat{D}_1 = 180^\circ$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{F}_4 + \widehat{F}_1 + \widehat{F}_3 + \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 360^\circ$.

mà $\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 60^\circ$ nên $\widehat{F}_2 = 60^\circ$ (5)

Từ (1) và (5) suy ra Δ BFC (đều)

b) $\widehat{BAC} > 60^\circ$ (hình b)

Chứng minh tương tự như phần trên.

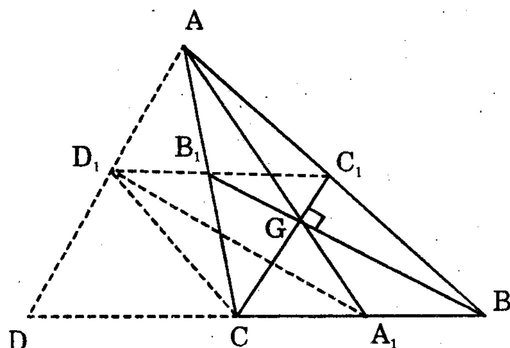
Bài 133

Chứng minh rằng nếu hai đường trung tuyến của một tam giác vuông góc với nhau thì trung tuyến thứ ba bằng cạnh huyền của một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng hai trung tuyến kia.

(Đề thi học sinh giỏi Hà Nội, 1981)

GIẢI

Cho tam giác ABC, có các đường trung tuyến là AA_1, BB_1 và CC_1 với $BB_1 \perp CC_1$. Phải chứng minh rằng AA_1 là cạnh huyền của một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng BB_1 và CC_1.



Để giải bài toán, ta dựng một tam giác vuông có cạnh huyền bằng AA_1 còn hai cạnh kia bằng BB_1 và CC_1 (hoặc dựng một tam giác có ba cạnh bằng AA_1, BB_1 và CC_1 và chứng minh tam giác này vuông, có cạnh huyền bằng AA_1).

Bài toán có nhiều cách giải:

Cách 1:

Từ A, kẻ Ax // CC_1 cắt đường thẳng qua BC tại D. Kéo dài C_1B_1, cắt AD tại D_1. Do C_1 và B_1 là trung điểm của AB và AC (theo giả thiết), nên C_1D_1 cũng như C_1C là các đường trung bình của tam giác ABD. Vì vậy C_1C //= AD_1 (1). Do đó AC_1CD_1 là hình bình hành.

Suy ra $D_1B_1 = B_1C_1$, mà B_1C_1 //= A_1B $\left(= \frac{1}{2}BC\right)$,

nên D_1B_1 //= A_1B và tứ giác $D_1B_1BA_1$ là hình bình hành.

Do đó B_1B //= D_1A_1 (2)

Từ (1), (2) và $C_1C \perp B_1B$ (giả thiết), ta có AD_1A_1 là tam giác vuông (tại D_1) có cạnh huyền là AA_1 còn hai cạnh kia bằng BB_1 và CC_1 (đpcm).

Cách 2:

Kẻ Ax // CC_1 và A_1y // BB_1. Gọi D_1 là giao điểm của Ax và A_1. Tam giác AD_1A_1 vuông. Chỉ cần chứng minh rằng $AD_1 = CC_1$ và $A_1D_1 = BB_1$ (bạn đọc tự chứng minh).

Cách 3:

Xét tam giác vuông BGC, có cạnh huyền là BC.

Chú ý rằng $CG = \frac{2}{3}CC_1$, $BG = \frac{2}{3}BB_1$. Ta chỉ cần chứng minh $BC = \frac{2}{3}AA_1$.

Bài 134

Cho tam giác ABC vuông tại A, với AB = AC = a.

a) Lấy trên cạnh AC điểm D và trên cạnh AB điểm E sao cho AD = AE. Các đường vuông góc với EC kẻ từ A và D lần lượt cắt cạnh BC ở K và L. Chứng minh rằng BK = KL.

b) Một hình chữ nhật APMN thay đổi có đỉnh P trên cạnh AB, đỉnh N trên cạnh AC và có chu vi luôn luôn bằng 2a. Tìm tập hợp đỉnh M của các hình chữ nhật đó.

c) Chứng minh rằng khi hình chữ nhật APMN thay đổi thì đường vuông góc kẻ từ M xuống đường chéo PN của nó luôn luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi vào cấp III, chuyên toán, 1975)

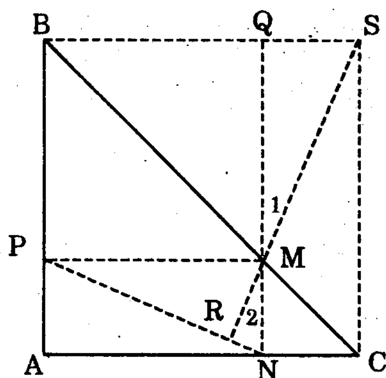
GỢI Ý:

a) Qua B kẻ đường song song với KA cắt đường thẳng AC tại I. Ta chứng minh:

Δ ABI = Δ ACE.

IA = AE

IA = AD



vì AB // KA // DL mà IA = AD

⇒ BK = KL

b) Ta có

AN + NM = a. Mặt khác

AN + NC = a. Vậy: NM = NC

Δ MNC vuông, cân

$$\widehat{MCN} = 45^\circ$$

M nằm trên cạnh BC.

Hãy chứng minh tập hợp các đỉnh M chính là cạnh BC.

c) Dựng hình vuông ABSC. Kéo MN cắt BS ở Q. Ta dễ dàng chứng minh được Δ PMN = Δ MQS.

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$

⇒ ba điểm M, R, S thẳng hàng (MR ⊥ PN)

hay đường MR luôn luôn đi qua đỉnh S cố định của hình vuông ABSC.

Bài 135

Cho một tứ giác lồi ABCD thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) AB // CD

(2) AB > CD

(3) BC = CD = DA

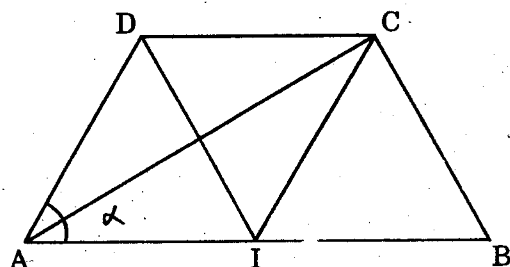
(4) AC ⊥ BC

Ta kí hiệu α là độ lớn của góc DAB, F_1 và F_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABC và ACD.

Tính α và tỉ số $F_1 : F_2$.

(Đề thi học sinh giỏi vòng I. CHDC Đức – 1979)

GỢI Ý:



Với các điều kiện đã cho, tứ giác ABCD là hình thang cân. Gọi I là trung điểm của AB, ta dễ dàng chứng minh ADCI là hình thoi, suy ra Δ ADI đều. Do đó α = 60°.

ADCI hình thoi

$S_{ACD} = S_{ACI}$

I là trung điểm AB

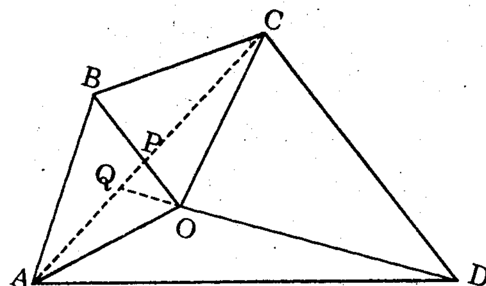
$$S_{ACI} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Bài 136

Cho tứ giác ABCD và điểm O ở trong tứ giác. Chứng minh rằng nếu các tam giác ABO, BCO, CDO và DAO có diện tích bằng nhau thì điểm O nằm trên đường chéo AC hoặc BD.

(Đề thi vô địch toán Thụy Sĩ, 1982)

GIẢI



Giả sử đường chéo AC cắt OB và OD ở P và Q.

$S_{AOB} = S_{COB}$ (gt) $\Rightarrow$ AP = PC

$S_{AOD} = S_{COD}$ (gt) $\Rightarrow$ AQ = QC

Suy ra P ≡ Q.

Nếu $O \not\equiv P$ thì bốn điểm B, O, P, D nằm trên một đường thẳng, nghĩa là O nằm trên đường chéo BD của ABCD.

Nếu $O \equiv P$ thì O nằm trên đường chéo AC của ABCD.

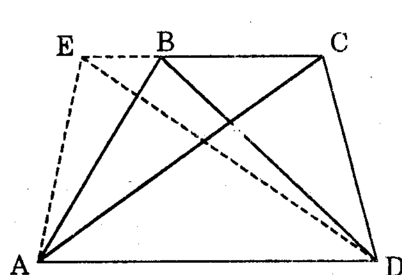
Như vậy, O nằm trên AC hoặc BD (đpcm).

Bài 137

Chứng minh rằng nếu các góc ở đáy của một hình thang không bằng nhau thì đường chéo xuất phát từ đỉnh góc nhỏ hơn sẽ lớn hơn đường chéo xuất phát từ đỉnh góc lớn hơn.

(Đề thi vô địch toán Hungari, 1955)

GỢI Ý:



Giả sử ta có: $\widehat{A} < \widehat{D}$.

Ta dựng hình thang cân AECD trong đó:

$$\widehat{AEB} = \widehat{DCB}$$

và AC = ED

Ta có:

$$\widehat{EBD} > \widehat{DCB} \text{ vậy } \widehat{EBD} > \widehat{AEB} > \widehat{BED}$$

Trong tam giác EBD ta có: ED > BD ⇒ AC > BD.

Bài 138

Cho biết diện tích S và góc ở đỉnh C của tam giác ABC. Với những cạnh AC và BC nào thì tam giác có cạnh AB bé nhất?

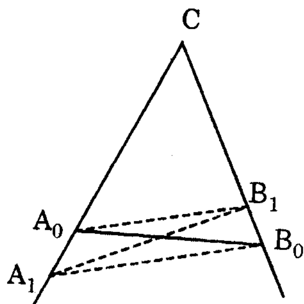
(Đề thi vô địch toán Hungari, 1902)

GIẢI

Xét tam giác cân A_0B_0C và tam giác A_1B_1C có cùng góc ở đỉnh C và diện tích S:

$$CA_1 > CA_o = CB_o$$

Ta chứng minh $A_oB_o < A_1B_1$, từ đó suy ra rằng tam giác có cạnh c = AB bé nhất thỏa mãn các điều kiện của bài toán là *tam giác cân.*



$S_{CA_oB_o} = S_{CA_1B_1}$

$S_{A_oB_1A_1} = S_{A_oB_1B_o}$

$A_oA_1B_oB_1$ là hình thang.

Trong hình thang $A_oA_1B_oB_1$, ta có:

$\widehat{A_oA_1B_o} < \widehat{CA_oB_o}$

mà $\widehat{CA_oB_o} = \widehat{CB_oA_o} < \widehat{B_1B_oA_1}$.

Do đó $\widehat{A_oA_1B_o} < \widehat{B_1B_oA_1}$, suy ra $A_1B_1 > A_oB_o$ (theo bài 141) nghĩa là $c = A_oB_o$ là bé nhất.

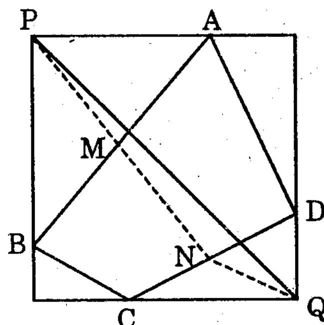
Bài 139

Các đỉnh của một tứ giác lồi nằm trên các cạnh khác nhau của một hình vuông mà đường chéo có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng chu vi của tứ giác không nhỏ hơn 2.

(Đề thi vào chuyên toán cấp 3 – 1978)

GỢI Ý:

Giả sử ABCD là tứ giác đã cho. Gọi M, N là trung điểm của AB và CD.



Lúc đó

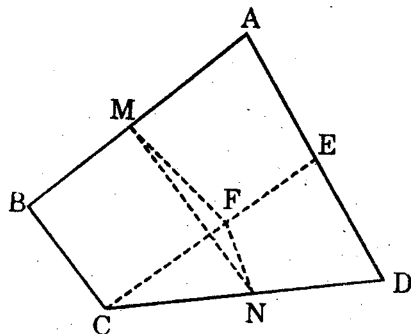
PM + MN + NQ ≥ PQ

hay PM + MN + NQ ≥ 1

Như vậy ta chỉ cần chứng minh nửa chu vi của tứ giác ABCD không

nhỏ hơn PM + MN + NQ (tức không nhỏ hơn 1), hay là chứng minh tổng PM + MN + NQ không lớn hơn nửa chu vi của ABCD.

Ta có : $PM = \frac{AB}{2}$, $QN = \frac{CD}{2}$



Trong tứ giác lồi ABCD, các đường thẳng kẻ từ D và C song song với AB phải có một đường cắt cạnh của tứ giác

Giả sử CE // AB (E trên AD, nếu CD // AB thì E ≡ D).

Gọi F là trung điểm của CE. Ta có:

$MN \le MF + FN$

Mặt khác $MF \le \frac{AE + BC}{2}$

$$MF + FN \le \frac{AE + BC}{2} + \frac{ED}{2} = \frac{AD + BC}{2}$$

$$PM + MN + NQ \le \frac{AB + CD + AD + BC}{2}$$

Bài 140

Cho tam giác ABC và ba đường trung tuyến AM, BN và CP. Chứng minh rằng sáu tam giác do các trung tuyến tạo thành trong tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

(Đề thi học sinh giỏi cấp 2 miền Bắc, 1964)

GỢI Ý:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta chứng minh rằng các cặp tam giác sau đây có diện tích bằng nhau:

Δ BGM và Δ CGM

Δ AGN và Δ CGN

Δ AGP và Δ BGP

(chúng có đáy bằng nhau và cùng đường cao)

Tương tự, cặp tam giác ABG và ACG có cùng diện tích.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 141

Cho tứ giác lồi ABCD, với O là giao điểm của các đường chéo. Biết rằng các tam giác ABO, BCO, CDO và ADO có chu vi bằng nhau, chứng minh rằng ABCD là hình thoi.

(Đề thi vô địch toán Mascova, 1972)

GIẢI

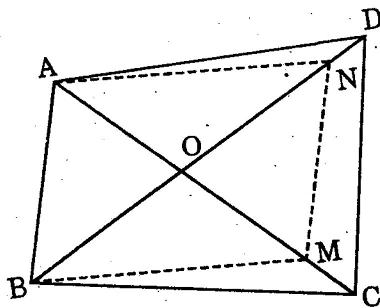
Trên OC lấy điểm M với OM = OA, trên OD lấy điểm N với ON = OB.

Tứ giác ABMN là hình bình hành.

Ký hiệu cvABO là "chu vi tam giác ABO", ta có:

cvABO = cvAON = cvBOM

mà cvABO = cvAOD = = cvBOC (theo giả thiết)



Do đó:

cvAON = cvAOD ⇒ N ≡ D

cvBOM = cvBOC ⇒ M ≡ C

Vậy ABCD là hình bình hành. Từ cvAOB = cvAOD, mà OB = OD, suy ra AB = AD, nghĩa là ABCD là hình thoi (đpcm).

Bài 142

Cho ngũ giác lồi ABCDE; A', B', C', D', E' là trung điểm các cạnh của nó.

Chứng minh rằng:

$$2S_{A'B'C'D'E'} \geq S_{ABCDE}$$

(Đề thi vô địch toán Mascơva, 1963)

GỢI Ý:

$S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDE} + S_{DEA} + S_{EAB} < 2S_{ABCDE}$

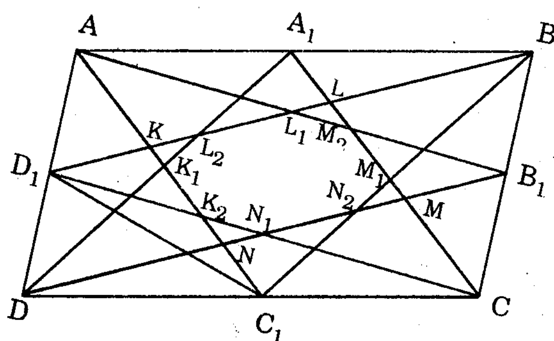
Chú ý rằng $S_{A'BB'} = \dfrac{S_{ABC}}{4}$

Bài 143

Tám đường thẳng nối các đỉnh của một hình bình hành với trung điểm của các cạnh không qua đỉnh ấy cắt nhau tạo thành một hình 8 cạnh.

Chứng minh rằng diện tích của hình 8 cạnh này bằng $\frac{1}{6}$ diện tích hình bình hành đã cho.

(Đề thi vô địch toán Nam Tư, 1972)



GỢI Ý:

Trước hết chứng minh rằng KLMN là hình bình hành có diện tích:

$$S_{KLMN} = \frac{S_{ABCD}}{5}$$

Tìm cách chứng minh tiếp rằng:

$$S_{KK_1L_2} = S_{LL_1M_2} = S_{MM_1N_2} = S_{NN_1K_2} = \frac{S_{KLMN}}{24}$$

(Chứng minh $KK_1 = \frac{KN}{4}$; $KL_2 = \frac{KL}{3}$)

Diện tích hình 8 cạnh bằng:

$$S_{KLMN} - 4S_{KK_1L_2} = \frac{S_{ABCD}}{6}$$

Bài 144

Một đường thẳng cắt hai cạnh AB và BC của tam giác ABC ở hai điểm M và K. Biết rằng diện tích tam giác BMK bằng diện tích tứ giác AMKC, hãy chứng minh rằng

$$\frac{MB + BK}{MA + AC + CK} \geq \frac{1}{3}$$

(Đề thi vô địch toán Mascơva, 1972)

GỢI Ý:

Đặt MB = a, BK = b, KC = c, CA = d, AM = e

$S_{BMK} > S_{MKC} \Rightarrow b > c$

$S_{BMK} > S_{AMK} \Rightarrow a > c$

Nếu $3(a + b) < c + d + e$

thì: $2a + 2b < d \Rightarrow AB + BC < AC$ (mâu thuẫn)

Bài 145

Một kho vật liệu K nằm ở giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình chữ nhật ABCD, trong đó AB là đường sắt, BC là đường ôtô, CD là bờ sông. Trên cạnh AD có nhà máy M với AM = 2MD.

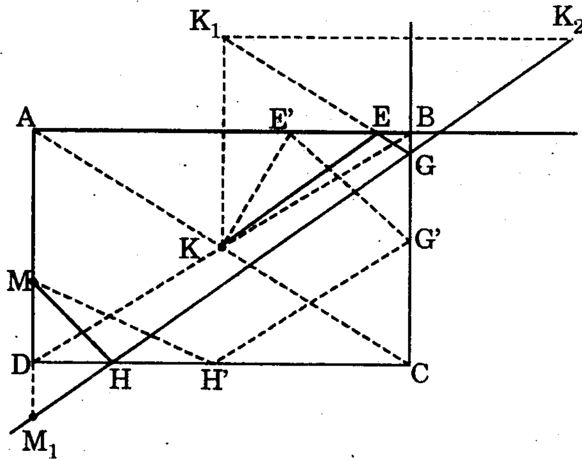
Một ôtô xuất phát từ K chở vật liệu từ đường sắt trước, sau đó đến cạnh đường ôtô rồi đến cạnh bờ sông và cuối cùng đến nhà máy M.

Biết rằng ôtô có thể chạy trên mặt đất theo hướng nào cũng được. Tìm xem ôtô nên đi theo một con đường gấp khúc như thế nào để đường đi là ngắn nhất?

(Đề thi học sinh giỏi cấp II, 1988)

Gợi ý:

Đường gấp khúc KEGHM là lộ trình ngắn nhất mà ôtô cần đi. Để xác định đường gấp khúc này ta làm như sau:



Lấy điểm K_1, đối xứng với K qua AB, xong lấy điểm K_2 đối xứng với K_1 qua BC. Lấy M_1 đối xứng với M qua D.

Đường K_2M_1 cắt BC ở G và cắt DC ở H.

Đường K_1G cắt AB ở E.

Để chứng minh KEGHM là lộ trình ngắn nhất, ta chọn một lộ trình khác, chẳng hạn KE'G'H'M' và chứng minh độ dài đường gấp khúc KE'G'H'M' lớn hơn độ dài đường gấp khúc KEGHM.

NHỮNG BÀI TOÁN "CÓ HỌ HÀNG" VỚI NHAU

Bài 146.1.

Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông ABGF, ACDE.

Chứng minh BE = CF và BE ⊥ CF.

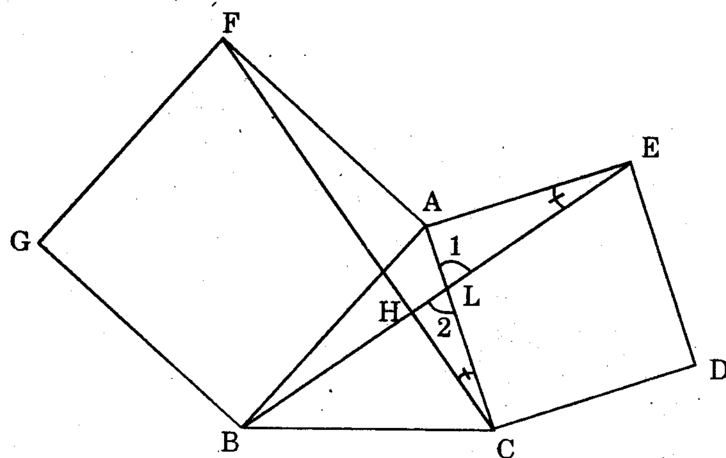
GỢI Ý:

Ta có

$\widehat{FAC} = \widehat{BAE}$ (1)

AC = AE (2)

AF = AB (3)



Từ (1), (2), (3) cho ta

$\Delta FAC = \Delta BAE \Rightarrow BE = CF.$

Ta cũng có $\widehat{AEB} = \widehat{ACF}$, $\widehat{L_1} = \widehat{L_2}$ và $\widehat{AEB} + \widehat{L_1} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACF} + \widehat{L_2} = 90^\circ$

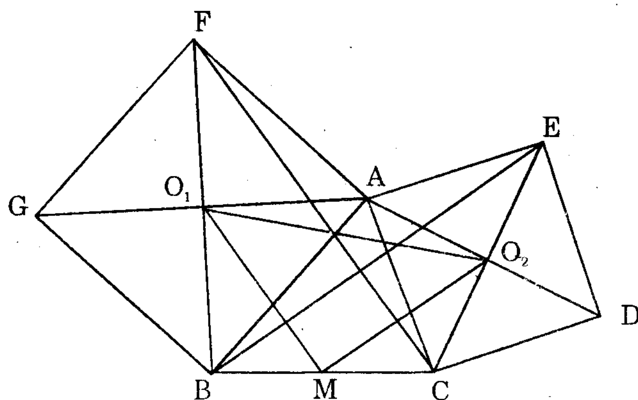
$\Rightarrow \widehat{CHL} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp CF.$

Bài 146.2

Cho tam giác ABC với M là trung điểm cạnh BC, dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABGF, ACDE có tâm theo thứ tự là O_1, O_2.

Chứng minh tam giác O_1 MO_2 là tam giác vuông cân.

GỢI Ý:



$MO_1 = \frac{1}{2}$ CF và MO_1 // CF

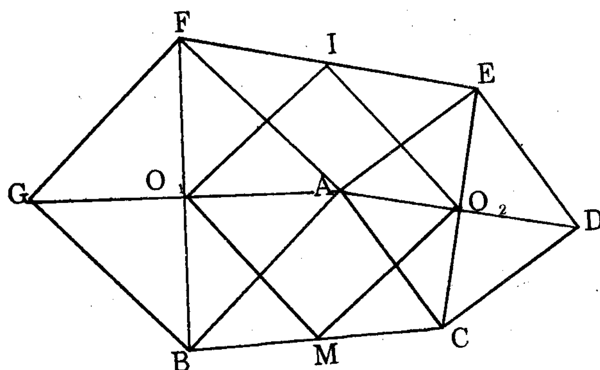
$MO_2 = \frac{1}{2}$ BE và MO_2 // BE

Dựa vào kết quả bài tập 146.1.

Bài 146.3

Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABGF, ACDE có tâm theo thứ tự là O_1, O_2. Gọi M, I theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC và EF.

Chứng minh tứ giác MO_1IO_2 là hình vuông.



GỢI Ý:

Hai hình vuông dựng trên hai cạnh của tam giác ABC cũng là hai hình vuông dựng trên hai cạnh của tam giác AEF. Vì vậy O_1MO_2 và O_1IO_2 là các tam giác cân. Chỉ còn phải chứng minh $O_1I = O_2M$.

Bài 146.4

Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABGF, ACDE. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Tia IA cắt cạnh BC tại điểm A'. Chứng minh AA' ⊥ BC.

GIẢI

Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Trên tia AM lấy điểm M' sao cho MM' = AM

Tứ giác ABM'C là hình bình hành, cho ta

BM' = AC, hay BM' = AE

Ta lại có AB = AF

và $\widehat{ABM'} = \widehat{FAE}$ (cùng bù với $\widehat{BAC}$)

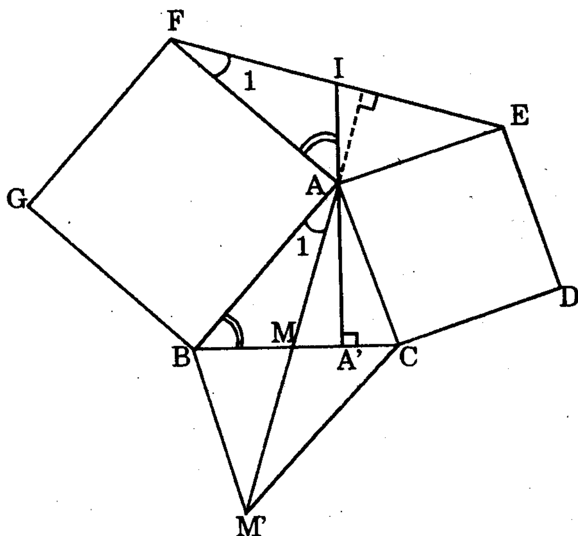
Vậy Δ FAE = Δ ABM', cho ta

AM' = FE hay AM = FI.

và $\widehat{F}_1 = \widehat{A}_1$

Kết hợp với AF = AB, suy ra Δ FAI = Δ ABM

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{FAI}$



Dễ thấy

$\widehat{FAI} + \widehat{BAA'} = 90^0$

nên

$\widehat{ABM} + \widehat{BAA'} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AA'B} = 90^0$

$\Rightarrow AA' \perp BC.$

NHẬN XÉT:

1. Từ việc giải bài 146.4, này ta có thêm được một kết quả nữa:

$$AM = \frac{1}{2} EF.$$

2. Vì hai tam giác ABC và FAE có vai trò như nhau trong bài toán này nên ta có thể suy ra hai kết luận:

$$AM \perp EF$$

và $$AI = \frac{1}{2} BC.$$

Bài 146.5.

Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác, các hình vuông ABGF, ACDE và dựng qua E đường thẳng song song với AF, qua F đường thẳng song song với AE, hai đường thẳng này cắt nhau tại K. Chứng minh rằng K nằm trên đường thẳng chứa đường cao AA' của tam giác ABC.

GỢI Ý:

AFKE là hình bình hành. K nằm trên đường thẳng AI (I là trung điểm của FE).

Bài 146.6.

Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABGF, ACDE. Dựng hình bình hành AFKE có các cạnh liên tiếp AF, AE. Gọi O_1 là tâm hình vuông ABGF.

Chứng minh tam giác O_1KC vuông cân.

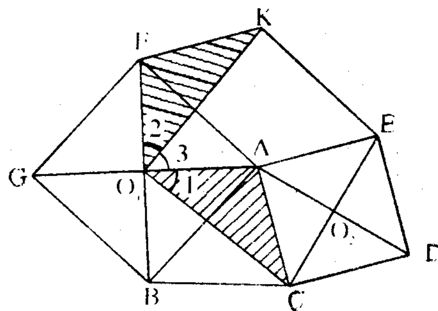
GỢI Ý

Hãy chứng minh

$\Delta\ O_1FK = \Delta\ CAO_1$

NHẬN XÉT: $\Delta\ O_2KB$ cũng vuông cân

(O_2 là tâm hình vuông ACDE).



Bài 146.7

Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABGF, ACDE. Dựng hình bình hành AFKE mà hai cạnh liên tiếp là AF, AE.

Chứng minh: 1. KB = CG và KB ⊥ CG

2. Ba đường thẳng KA, CG và BD đồng quy

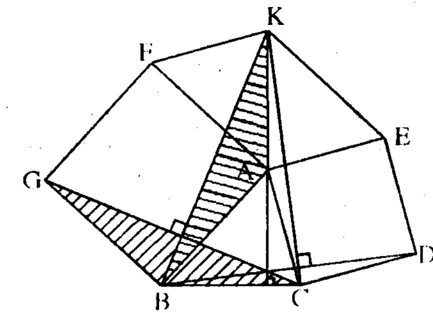
GỢI Ý

1. Chứng minh Δ AKB = Δ BCG

2. Tương tự, ta có BD ⊥ KC

Trong các bài tập trên, ta đã có KA ⊥ BC

Vậy CG, KA, BD chứa các đường cao của tam giác KBC



NHẬN XÉT CHUNG:

1. Chỉ với giả thiết cơ bản là dựng hai hình vuông trên hai cạnh của một tam giác, ta có thể khai thác để đưa ra hàng chục kết quả khác nhau.

2. Bây giờ ta khai thác bài toán theo hai hướng.

Thay đổi giả thiết:

Trong các bài toán trên ABC là tam giác bất kì. Bây giờ ta giả sử tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A. Các bạn hãy:

– Kiểm tra lại tất cả các kết luận đã có

– Kiểm tra lại tất cả chứng minh đã nêu. Có thể thay đổi, đơn giản được nhiều lập luận trên cơ sở tính chất đặc biệt của tam giác ABC.

– Tìm thêm các kết luận mới, nếu có.

Mở rộng bài toán:

Trong bài toán trên đây, giả thiết cơ bản là dựng hai hình vuông trên hai cạnh AB, AC. Tuy vậy cả ba cạnh AB, BC, CA đều bình đẳng, nghĩa là không có gì để buộc ta phải dựng hình vuông trên cạnh này mà không dựng trên cạnh kia. Do vậy, ta nghĩ đến dựng trên cả ba cạnh ba hình vuông.

Bài 146.8

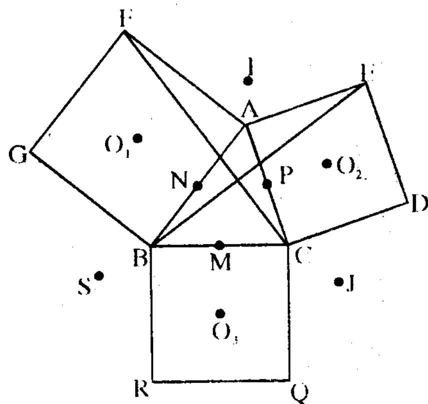
Dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba hình vuông ABGF, ACDE, BCQR.

Hãy dựa trên các kết quả có được từ các bài tập trên để suy ra các kết quả với giả thiết trên.

GỢI Ý:

Ta có các kết quả, chẳng hạn

– Các cặp đường thẳng bằng nhau và vuông góc



BE = CF ; BE ⊥ CF

AQ = BD ; AQ ⊥ BD

AR = CG ; AR ⊥ CG

– Có 3 hình vuông:

MO_1IO_2

NO_2JO_3

PO_1SO_3

Các bạn thống kê tiếp các kết quả.

CHÚ Ý:

Các bạn nên vẽ hình thật chính xác. Đôi khi hình vẽ gợi cho ta những kết luận bất ngờ, tất nhiên các kết luận này cần được chứng minh và cần cảnh giác để không bị trực giác đánh lừa.

Bài 146.9.

Dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba hình vuông ABGF, ACDE và BCRQ với các tâm theo thứ tự là O_1, O_2, O_3; gọi N, P, S, R theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, O_1O_2, AO_3.

1. Chứng minh $O_1O_2 = AO_3$ và $O_1O_2 \perp AO_3$

2. Chứng minh ba đường thẳng AO_3, BO_2, CO_1 đồng quy

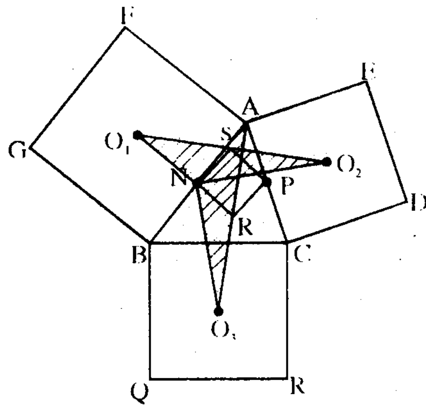
3. Chứng minh NSPR là hình vuông

GỢI Ý:

1. Chứng minh $\Delta\ O_2NO_3$ vuông cân để có $O_2N = O_3N$

Sau đó chứng minh $\Delta\ O_1NO_2 = \Delta\ ANO_3$

để có $O_1O_2 = AO_3$



2. Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường cao trong tam giác

3. Chứng minh NR = RP = PS = SN

và NR ⊥ RP.

Bài 146.10

Cho hình bình hành ABCD. Dựng trên các cạnh và về phía ngoài hình bình hành, các hình vuông ADEF, DCLM, CBKI, ABGH. Gọi P, Q, R, S theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABGH, CBKI, DCLM, ADEF và O là tâm của hình bình hành ABCD.

1. Chứng minh các tứ giác FHIL, EGKM, AHCL, BGDM v.v..., là các hình bình hành. (Có thể chỉ rõ thêm các hình bình hành khác).

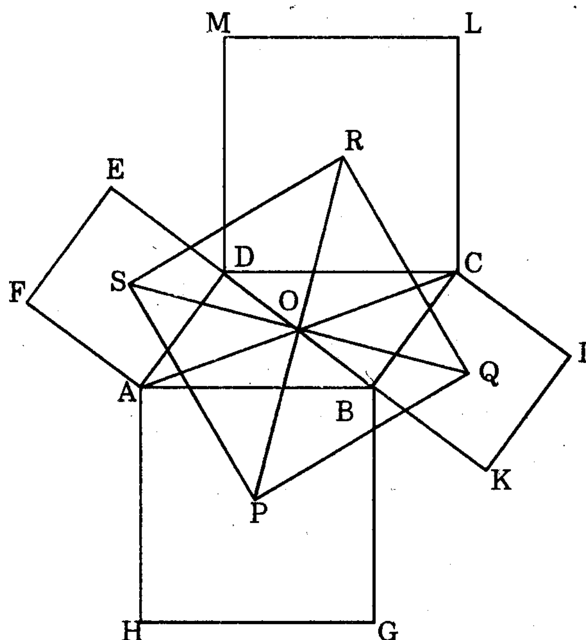
2. Các hình bình hành trên có tính chất gì chung?

3. Chứng minh tứ giác PQRS là hình vuông, có tâm là điểm O.

GỢI Ý:

3. Xét tam giác ADC.

Các hình vuông ADEF, DCLM có tâm S, R: dựng trên hai cạnh của tam giác ADC. O là trung điểm của cạnh AC. Theo bài 146.2, tam giác SOR vuông cân.



Lại xét tam giác BCD với hai hình vuông dựng trên hai cạnh, có tam giác ROQ vuông cân. Tương tự, QOP và POS là các tam giác vuông cân.

NHẬN XÉT CHUNG:

1. Cả 10 bài toán trên đều có thể coi là có "họ hàng" với nhau và là những bài toán có tính chất "kinh điển". Nó có mặt trong nhiều sách toán.

2. Qua các lời giải trên, ta đã có dịp làm quen với việc chứng minh:

– Hai đoạn thẳng bằng nhau.

– Hai đoạn thẳng vuông góc với nhau.

– Ba điểm thẳng hàng.

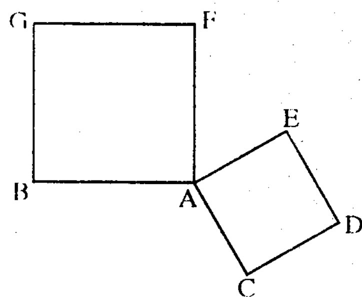
– Ba đường thẳng đồng quy

Các bạn hãy tổng kết các cách chứng minh này và minh họa qua cách trình bày chi tiết các lời giải!

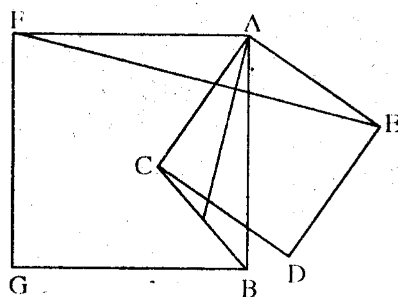
3. Đôi khi người ta ghép hai, ba bài toán trên thành một bài để có một bài toán "khó" hơn, ví dụ: Khi giải bài 146.3 ta phải trải qua hai "trung gian" là bài 146.1 và 146.2.

Một chút suy nghĩ:

Cho hai hình vuông có chung nhau một đỉnh (như hình a và b).



a)



b)

Hãy thêm vào các giả thiết khác để có những bài toán quen thuộc, và từ những kết luận trên hai hình hãy so sánh những yếu tố giống nhau và khác nhau trong giả thiết của hai bài toán trên hai hình.

• BÀI TOÁN NAPOLÉON

Bài toán trên đây tương tự bài toán:

Dựng về phía ngoài tam giác ABC những tam giác đều nhận AB, BC, CD làm cạnh và có tâm theo thứ tự là O_1, O_2, O_3.

Chứng minh tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều. *Bài toán khá nổi tiếng này thường được gọi là* "bài toán Napoléon".

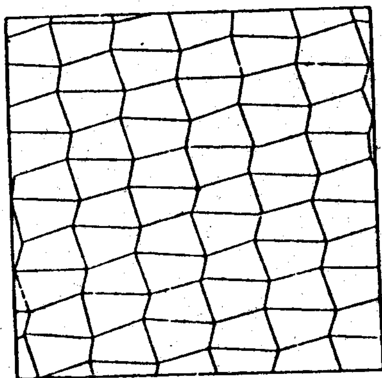
Napoléon Bonaparte (1769 - 1821) là một nhà quân sự nổi tiếng và là hoàng đế nước Pháp (1804 - 1815). Ông rất thích toán. Những lúc rỗi rãi, lúc nghỉ ngơi giữa hai trận đánh hoặc sau các buổi thiết triều, ông hay đem các bài toán do mình nghĩ ra để đố vui các quan đại thần, các thống chế, các tướng lĩnh dưới quyền.

• BÀI TOÁN "LÁT GẠCH NỀN NHÀ"

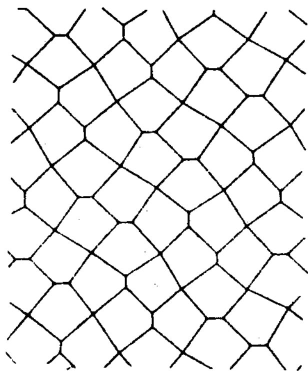
Ta thường thấy nền nhà, tường nhà được lát gạch hình vuông hoặc hình chữ nhật (các viên gạch xếp khít vào nhau, không chồng lên nhau và không có chỗ trống). Ta nói rằng: có thể lát mặt phẳng *bằng hình vuông hay hình chữ nhật.*

Hình a) cho thấy có thể lát mặt phẳng bằng hình tứ giác bất kì.

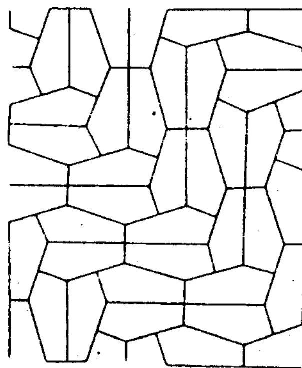
Lát mặt phẳng bằng hình ngũ giác, đó là bài toán khá khó. Để thấy rằng không thể lát mặt phẳng bằng hình ngũ giác đều được. Trong một thời gian khá dài, các nhà toán học thấy rằng chỉ có 8 dạng hình ngũ giác không đều có thể lát được mặt phẳng. Nhưng điều bất ngờ là năm 1975 và 1977, bà M.Rice *(một người không có trình độ cao về toán học!) đã tìm ra thêm 5 dạng hình ngũ giác không đều khác nữa (hai dạng trên hình b và c), và đến nay bài toán "Có bao nhiêu dạng hình ngũ*



giác đều có thể lát được mặt phẳng ?" vẫn chưa có lời giải!

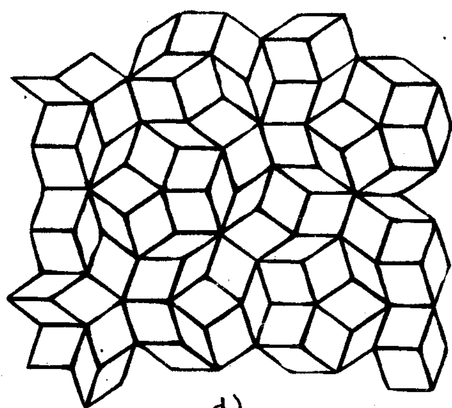


b)

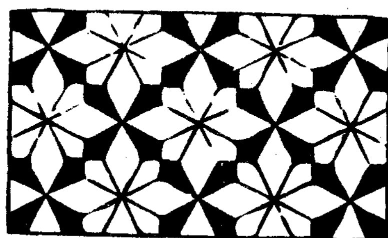


c)

Nghệ thuật trang trí chú ý đến việc lát mặt phẳng bằng những hình đa giác khác nhau. Hình d) cho thấy có thể lát mặt phẳng bằng hai hình thoi khác nhau *(đây là một trong vô số cách lát mặt phẳng bằng hai hình thoi khác nhau, do nhà vật lí học Anh* Penrose *tìm ra). Với một hình thoi và hình con diều, có thể lát mặt phẳng như hình f).*

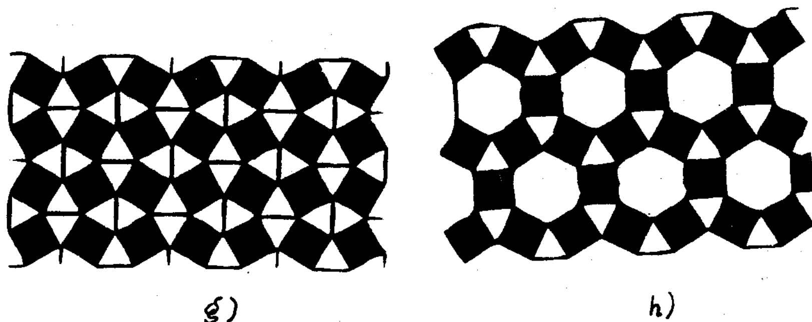


d)



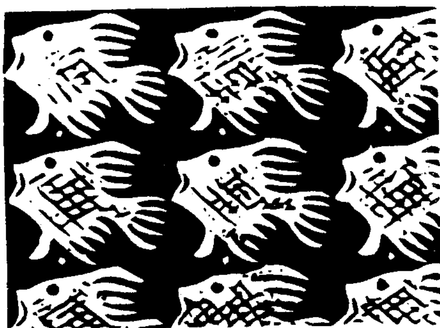
f)

Hình g) và hình h) cho thấy vài cách lát mặt phẳng bằng những hình đa giác đều khác nhau. Ta có thể bắt gặp một số cách lát gạch đẹp trên một số hè phố ở thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội.



g) h)

Họa sĩ nổi tiếng người Hà Lan Mauritz Esher *(1898 - 1972) đã sáng tác nhiều cách lát mặt phẳng bằng những hình rất độc đáo và đẹp, như hình k), phối hợp hình con cá và con chim chuyển động ngược chiều nhau.*



k)

CHƯƠNG II

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§1. ĐỊNH LÍ THALÈS TRONG TAM GIÁC

A. ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ

1. Tỉ số hai đoạn thẳng

– Tỉ số hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

– Tỉ số hai đoạn thẳng không phụ thuộc đơn vị đo.

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

AB và CD tỉ lệ với A'B' và C'D' $\Leftrightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$

3. Nhắc lại các tính chất của tỉ lệ thức

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \Rightarrow \begin{cases} 1.\ AB \cdot C'D' = A'B' \cdot CD \\ 2.\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CD}{C'D'} \\ 3.\ \dfrac{AB \pm CD}{CD} = \dfrac{A'B' \pm C'D'}{C'D'} \\ 4.\ \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB \pm A'B'}{CD \pm C'D'} \end{cases}$$

• ***Một vài khái niệm cần biết:***

– *Đoạn thẳng AB được gọi là* trung bình nhân *của hai đoạn thẳng CD và EF nếu ta có :*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB} \text{ hay } AB^2 = CD.EF.$$

– *Đoạn thẳng AB được gọi là* trung bình điều hòa *của hai đoạn thẳng CD và EF nếu ta có:*

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{CF}$$

Cho một đoạn thẳng AB. Một điểm C thuộc đoạn thẳng AB (hoặc thuộc đường thẳng AB) được gọi là *chia đoạn thẳng AB theo tỉ số* $\frac{m}{n}$ *(m, n là các số dương), nếu ta có:*

$$\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$$

Bài 147

Trên đường thẳng Δ cho một đoạn thẳng AB. Một điểm C thuộc đoạn thẳng AB và chia AB theo tỉ số $\frac{5}{3}$. Hãy tính các tỉ số: $\frac{AB}{AC}; \frac{AB}{CB}$.

GIẢI

$C \in AB \Rightarrow AC + CB = AB$

$\frac{AC}{CB} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{AC + CB}{CB} = \frac{5+3}{3}$ (tính chất của tỉ lệ)

$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{8}{3}$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{5}{3} \Rightarrow \quad \frac{CB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{CB + AC}{AC} = \frac{3+5}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{8}{5}.$$

Bài 148.

Cho một đoạn thẳng AB và một điểm C thuộc đoạn thẳng ấy sao cho ta có:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} \quad (m > 0, n > 0)$$

Hãy tính các tỉ số:

$$\frac{AC}{AB}, \frac{CB}{AB}.$$

Đáp số:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{m+n}; \quad \frac{CB}{AB} = \frac{n}{m+n}$$

– Hãy giải bài toán trong trường hợp tổng quát là điểm C nằm trên đường thẳng AB.

Bài 149.

Cho một đoạn thẳng AB có trung điểm là O. Một điểm C thuộc đoạn thẳng AB và một điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n} \quad (m > 0; n > 0)$$

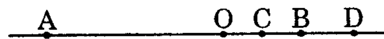
Hãy chỉ rõ vị trí của các điểm C, D đối với điểm O.

GIẢI (vắn tắt)

Xét các trường hợp:

a) Nếu m > n > 0 thì $\frac{m}{n} > 1$.

Ta có:



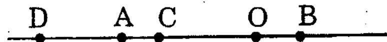
CA > CB (C ở giữa O và B)

DA > DB (B ở giữa A và D)

C và D đều ở bên phải điểm O.

b) Nếu 0 < m < n thì $\frac{m}{n} < 1$

Ta có:



CA < CB (C ở giữa A và O)

DA < DB (A ở giữa D và B).

C và D cùng ở bên trái điểm O.

c) Nếu m = n thì $\frac{m}{n} = 1$ và $C \equiv D \equiv O$

Trung điểm O là điểm chia đoạn AB theo tỉ số k = 1.

• *Ta thấy rằng với một đoạn thẳng AB và một tỉ số* $\frac{m}{n} > 0$ $\left(\frac{m}{n} \neq 1\right)$ *có một điểm C thuộc* ***đoạn AB*** *và một điểm D thuộc* ***đường thẳng AB*** *chia AB theo cùng một tỉ số* $\frac{m}{n}$. *Người ta gọi C là* ***điểm chia trong*** *và D là* ***điểm chia ngoài*** *đoạn AB theo tỉ số* $\frac{m}{n}$. *Bốn điểm A, B, C, D như vậy được gọi là một* ***hàng điểm điều hòa.***

Định nghĩa:

Nếu trên một đường thẳng có bốn điểm A, B, C, D sao cho ta có tỉ lệ thức:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

thì ta nói rằng bốn điểm A, B, C, D hợp thành một hàng điểm điều hòa và hai điểm C, D chia điều hòa đoạn thẳng AB *hay là* C và D là liên hiệp điều hòa đối với A và B.

Từ tính chất của tỉ lệ thức suy ra rằng nếu hai điểm C, D chia điều hòa đoạn AB thì hai điểm A, B cũng chia điều hòa đoạn CD:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

Bài 150

Trên đường thẳng Δ cho đoạn thẳng AB có độ dài 6cm. Một điểm C thuộc AB và CA = 3,6cm. Hãy xác định vị trí điểm D liên hiệp điều hòa với C đối với hai điểm A, B.

GIẢI (vắn tắt)

Vì $C \in AB$ nên AC + CB = AB. Vậy CB = 2,4cm.

Ta có: $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{3,6}{2,4} = \frac{3}{2}$

$\frac{DA}{DB} > 1 \Rightarrow DA > DB$. Vậy B ở giữa A, D.

$$DA = DB + AB$$

$\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{DB + AB}{DB} = \frac{3}{2}$. Vậy $\frac{AB}{DB} = \frac{1}{2}$

DB = 2AB = 12.

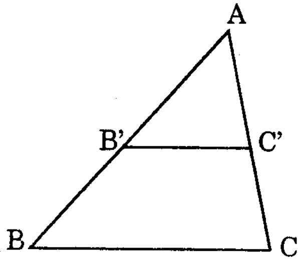
Điểm D ở về bên phải hai điểm A, B và cách B một đoạn DB = 12cm.

Bài 151

Cho đoạn thẳng AB có độ dài 20cm. Trên đường thẳng AB tìm các điểm chia AB theo tỉ số $\frac{3}{2}$.

B. ĐỊNH LÍ THALÈS (TALET) TRONG TAM GIÁC

1. Định lí thuận và đảo



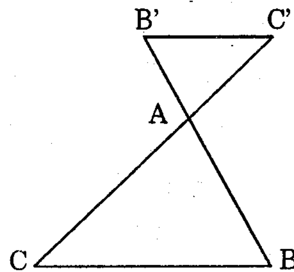
$$B'C' \,//\, BC \Leftrightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

$$(B'C' \,//\, BC \Leftrightarrow \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$$

$$B'C' \,//\, BC \Leftrightarrow \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$$

2. Hệ quả:

$$B'C' \,//\, BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC}$$



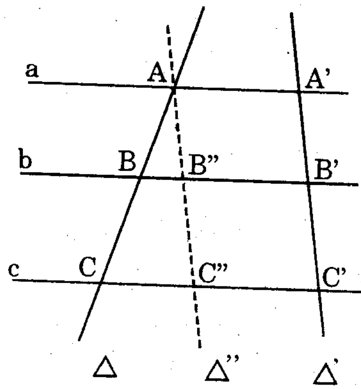
• ***Định lí Thalès thuận và đảo***

Trong phần trên ta đã biết định lí Thalès trong tam giác. Trên cơ sở đó, ta sẽ xét định lí Thalès dưới dạng tổng quát.

1. Định lí Thalès thuận

Nhiều đường thẳng song song định ra trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ

Chứng minh



Giả sử ba đường thẳng a, b, c song song với nhau và định ra trên hai cát tuyến bất kì Δ, Δ' các đoạn thẳng tương ứng AB, BC, A'B', B'C'. Ta cần chứng minh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Qua điểm A, ta dựng đường thẳng Δ" song song với Δ': Δ" cắt b ở B" và c ở C".

Trong tam giác ACC", ta có BB" // CC", theo định lí Thalès trong tam giác, ta có:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C''} \qquad (1)$$

Mặt khác, các tứ giác AA'B'B" và B"B'C'C" là những hình bình hành, nên:

$$AB'' = A'B' \text{ ; } B''C'' = B'C' \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

2. Định lí Thalès đảo

Cho hai đường thẳng song song a và b, định ra trên hai cát tuyến Δ và Δ' các đoạn thẳng tương ứng AB và A'B'. Nếu một đường thẳng thứ ba cắt Δ và Δ' tại hai điểm tương ứng C và C' ở cùng phía đối với đường thẳng b mà ta có các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \qquad (1)$$

thì đường thẳng c song song với a và b.

Chứng minh. *Qua C, ta kẻ c' // a // b, gọi giao điểm của c' với Δ' là C''. Theo định lí Thales thuận ta có:*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C''} \quad (2)$$

So sánh (2) với giả thiết (1), ta có:

$B'C' = B'C''$ (3)

Vì c' // b nên C và C'' nằm cùng một phía đối với b. Theo giả thiết thì C và C' cũng nằm cùng một phía đối với b. *Do đó C' và C'' ở cùng phía đối với B' và từ (3) ta có C' ≡ C'', tức là hai đường thẳng c và c' trùng nhau. Vậy c // a // b (đpcm).*

NHẬN XÉT: Định lí Thales đảo cho ta một cách để chứng minh hai đường thẳng song song.

Bài 152

Cho hình bình hành ABCD, E là trung điểm của cạnh AB, F là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng hai đoạn thẳng DE và BF chia đường chéo AC thành ba đoạn bằng nhau.

GIẢI

Cách 1: Ta có $DF = \frac{CD}{2}$; $EB = \frac{AB}{2}$

Do AB song song và bằng CD nên DF song song và bằng EB.

Vậy tứ giác BEDF là hình bình hành, cho ta DE // BF.

Áp dụng định lí Thalès trong tam giác CDM, ta có:

$$\frac{CN}{NM} = \frac{CF}{FD} = 1 \Rightarrow CN = MN \qquad (1)$$

Áp dụng định lí Thalès trong tam giác ABN, tương tự như trên ta có:

$$MN = AM \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$CN = NM = AM$$

Cách 2: Cũng chứng minh như trên, ta được DE // BF.

Từ A và C ta kẻ các đường thẳng song song với DE, BF, chúng cắt các đường thẳng DC và AB ở P, Q.

Ta có: AEDP là hình bình hành nên PD = AE

Từ đây ta có $$PD = DF = FC \qquad (1)$$

Bốn đường thẳng song song AP // ED // BF // QC định ra trên hai cát tuyến PC và AC các đoạn thẳng PD, DF, FC và AM, MN, NC. Theo định lí Thalès thuận ta có:

$$\frac{AM}{PD} = \frac{MN}{DF} = \frac{NC}{FC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra AM = MN = NC.

NHẬN XÉT:

– Giữ nguyên điểm F mà cho điểm E là trung điểm của AD, các bạn hãy phát biểu và giải bài toán trong trường hợp này.

– Ta đã gặp bài toán này trong chương I (bài 65) và đã giải dựa vào một tính chất khác của hình bình hành, đó là tính chất gì?

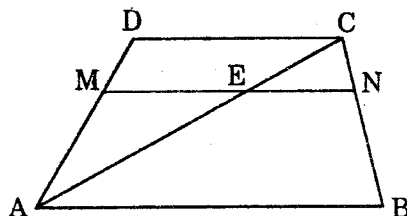
Bài 153

Cho hình thang ABCD, trong đó AB // CD. Kẻ đường thẳng song song với cạnh AB, cắt cạnh AD ở M và cắt cạnh BC ở N. Biết rằng:

$$\frac{DM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{m}{n}.$$

Chứng minh rằng:

$$MN = \frac{mAB + nCD}{m + n}$$



GIẢI

Kẻ AC, cắt MN ở điểm E.

Ta có:

$$\frac{EN}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{m}{m+n}. \text{ Vậy } EN = \frac{m}{m+n} \cdot AB$$

$$\frac{ME}{DC} = \frac{MA}{AD} = \frac{n}{m+n}. \text{ Vậy } ME = \frac{n}{m+n} \cdot CD$$

Từ đó, ta được:

$$MN = ME + EN = \frac{mAB + nCD}{m + n}$$

NHẬN XÉT:

Nếu đặt $\frac{m}{m+n} = h$ và $\frac{n}{m+n} = k$ thì $h + k = 1$. Từ đây ta có thể phát biểu được mệnh đề:

Trong một hình thang ABCD (AB // CD) nếu ta kẻ một cát tuyến MN song song với hai đáy thì ta có:

$$MN = hAB + kCD$$

với $h + k = 1$.

Đặc biệt, nếu $k = h = \frac{1}{2}$ thì M là trung điểm của AB và N là trung điểm của CD và ta có:

$$MN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD = \frac{AB + CD}{2}$$

Ta thấy: định lí về đường trung bình của hình thang là một trường hợp đặc biệt của mệnh đề nêu trên.

Bài 154

Cho hình thang ABCD, có đáy nhỏ là CD. Từ D ta kẻ đường thẳng song song với cạnh bên BC, cắt AC tại M và AB tại K. Từ C ta kẻ đường song song với cạnh bên AD, cắt cạnh đáy AB tại điểm F. Qua F ta lại kẻ đường song song với đường chéo AC, cắt cạnh bên BC tại điểm P. Chứng minh rằng:

a) MP song song với AB.

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy.

GIẢI

a) Áp dụng định lí Thalès vào tam giác ABC ta có:

$$FP \ // \ AC \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lí Thalès vào tam giác DMC:

$AK \,//\, DC \Rightarrow \dfrac{CM}{AM} = \dfrac{DC}{AK}$ (2)

Các tứ giác AFCD và DCBK là những hình bình hành nên AF = DC và FB = AK (3)

Kết hợp (1), (2) và (3) ta được:

$\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{CM}{AM}$. Từ đây, theo định lí Thalès đảo, ta có MP // AB.

b) Gọi I là giao điểm của đường chéo DB và đoạn thẳng CF, theo a):

$$\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$$

Mà $\dfrac{DC}{FB} = \dfrac{DI}{IB}$ (do FB // DC)

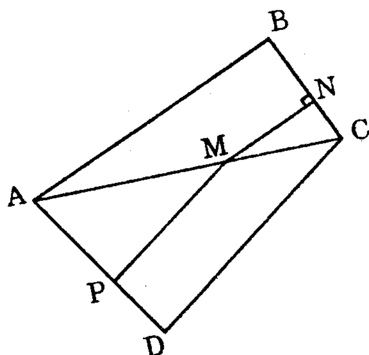
Vậy ta có: $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{DI}{IB}$

cho ta IP // DC (// AB)

Theo a) ta cũng có PM // AB. Theo tiên đề Euclide thì ba điểm P, I, M phải nằm trên một đường thẳng, hay đường thẳng MP phải đi qua giao điểm I của CF và DB.

Bài 155

Cho một tứ giác là ABCD, trong đó các góc B và D là vuông. Từ một điểm M trên đường chéo AC, ta kẻ các đường vuông góc MN xuống BC và MP xuống AD.



Chứng minh hệ thức:

$$\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$$

GỢI Ý:

Hãy tính riêng từng tỉ số $\frac{MN}{AB}; \frac{MP}{CD}$ rồi cộng lại.

Hãy thay đổi các giả thiết để tạo ra bài toán mới.

Trong bài toán trên đây, nếu ta bỏ giả thiết góc B và góc D là những góc vuông thì các giả thiết còn lại phải thay đổi như thế nào để ta vẫn có hệ thức trên?

Bài 156

Cho một hình bình hành ABCD. Một cát tuyến qua D cắt đường chéo AC ở I và cắt cạnh BC ở N, cắt đường thẳng AB ở M.

a) Chứng minh rằng tích AM.CN không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến qua D.

b) Chứng minh hệ thức:

$$ID^2 = IM.IN$$

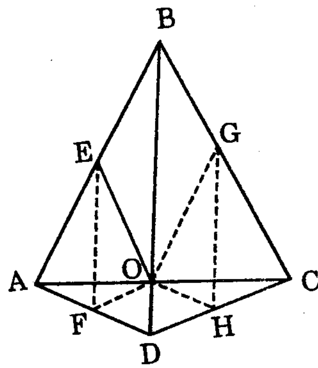
GỢI Ý:

a) Hãy chứng minh AM.CN luôn luôn bằng một đại lượng không đổi.

Bài 157

Cho một tứ giác lồi ABCD, các đường chéo AC và BD cắt nhau ở điểm O. Đường thẳng song song với BC qua O cắt AB ở E và đường thẳng song song với CD qua O cắt AD tại F.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF song song với đường chéo BD.



b) Từ O ta kẻ các đường song song với AB và AD, cắt BC và DC lần lượt tại G và H. Chứng minh hệ thức:

CG.DH = BG.CH

GỢI Ý:

a) Hãy chứng minh hệ thức:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$$

b) Dùng kết quả của câu a) cho trường hợp đoạn thẳng GH.

Bài 158

Cho tam giác ABC với BC < BA. Qua đỉnh C kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác BE của góc B; đường thẳng này cắt BE tại F và cắt trung tuyến BD tại điểm G. Chứng minh rằng đoạn thẳng EG bị đoạn thẳng DF chia làm hai phần bằng nhau.

GỢI Ý:

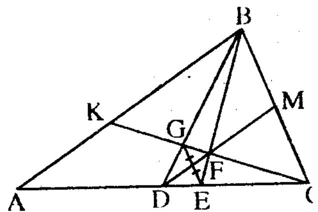
Chứng minh GE // BC

GIẢI (vắn tắt)

Gọi K là giao điểm của CF với cạnh AB

M là giao điểm của DF với cạnh BC

Δ KBC cân ⇒ BK = BC; DM là đường trung bình của Δ ABC



Do DF // AK

và $DF = \frac{1}{2}AK$, ta có

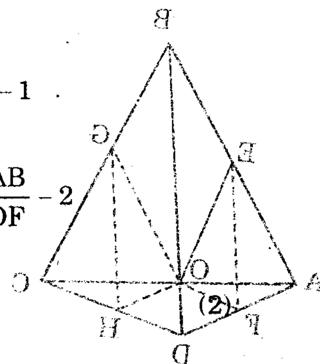
$$\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK} \qquad (1)$$

Ngoài ra ta cũng có:

$$\frac{CE}{DE} = \frac{DC - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$$

$$\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} - 1 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2$$

$$\frac{CE}{DE} = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2 = \frac{2BK}{AK} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \quad (3)$$

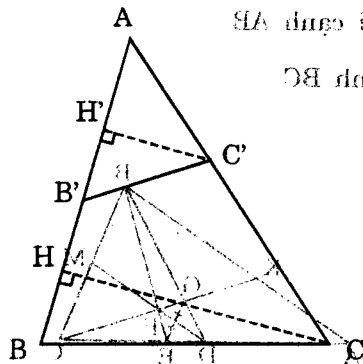
(3) chứng tỏ GE // BC và M là trung điểm của BC, suy ra DF chia GE ra làm hai phần bằng nhau.

Bài 159

Cho hai tam giác ABC và AB'C' có góc chung A. Chứng minh rằng

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$$

GIẢI



Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2} AB' \cdot C'H'$$

Vậy $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \dfrac{AB \cdot CH}{AB' \cdot C'H'}$

$$= \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{CH}{C'H'} \qquad (*)$$

Vì CH // C'H' nên: $\frac{CH}{C'H'} = \frac{AC}{AC'}$

Thay đẳng thức này vào (*) ta được:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$$

CHÚ Ý:

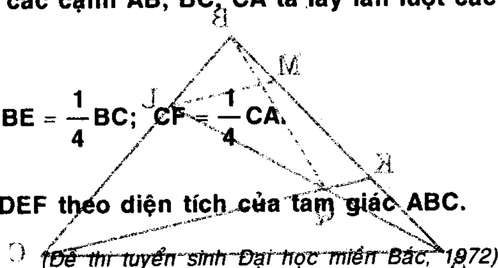
1. Trong trường hợp đặc biệt, khi B ≡ B', ta có:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AC}{AC'}$$

2. Trong trường hợp hai tam giác có một góc bằng nhau, ta có:

$$\hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'}$$

Bài 160



Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho:

$$AD = \frac{1}{4}AB;\ BE = \frac{1}{4}BC;\ CF = \frac{1}{4}CA.$$

Tính diện tích tam giác DEF theo diện tích của tam giác ABC.

(Đề thi tuyển sinh Đại học miền Bắc, 1972)

Bài 161

Cho tứ giác lồi ABCD, O là giao điểm các đường chéo. Diện tích tam giác ODC là trung bình nhân của diện tích các tam giác BOC và AOD. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

GỢI Ý:

Chứng minh $\frac{BO}{OD} = \frac{OC}{OA}$

Bài 162

Cho một tam giác ABC. Trên cạnh AB ta lấy một điểm K sao cho $\frac{AK}{BK} = \frac{1}{2}$. Trên cạnh BC ta lấy một điểm L sao cho $\frac{CL}{BL} = \frac{2}{1}$. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AL và CK. Tìm diện tích tam giác ABC nếu biết diện tích của tam giác BQC bằng 1 (đơn vị diện tích)

(Đề tuyển sinh vào Trường Đại học địa chất Mascơva, 1978)

GỢI Ý:

Qua L kẻ LM // CK.

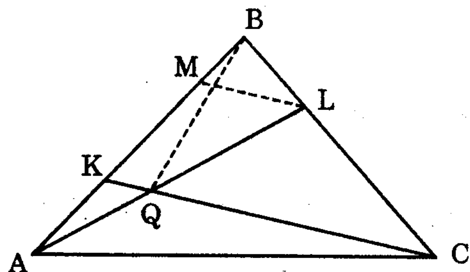
$$AM = \frac{7}{9}AB,\ QL = \frac{4}{7}AL$$

$$\frac{S_{BLQ}}{S_{BLA}} = \frac{4S_{QLC}}{7S_{ALC}} = \frac{4}{7}$$

$$S_{BQC} = S_{BQL} + S_{QLC}$$

$$S_{ABC} = S_{BLA} + S_{ALC}$$

$$S_{ABC} = \frac{7}{4}S_{BQC}$$



Bài 163

Trong tam giác ABC, các điểm D, L, F được lấy trên các cạnh AB, BC và AC sao cho

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CF}{AC} = \frac{1}{3}.$$

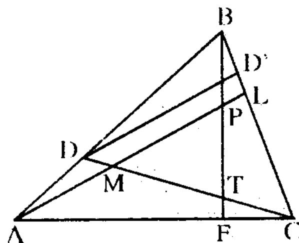
Tính diện tích tam giác tạo thành bởi các đường thẳng AL, BF, CD biết diện tích tam giác ABC là Q.

GỢI Ý:

Ta có

$S_{MPT} = Q - (S_{APB} + S_{BTC} + S_{CMA})$

Qua D kẻ D'D // AL. Xét tỉ số các đoạn thẳng, ta tìm được S_{CMA} và tương tự, ta kẻ thêm các đường song song thích hợp để tính S_{APB}, S_{BTC}.



Đáp số: $S_{MPT} = \frac{1}{7}Q.$

Mở rộng bài toán: Hãy giải bài toán với giả thiết

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CF}{AC} = \frac{1}{k}, \quad (k \neq 0)$$

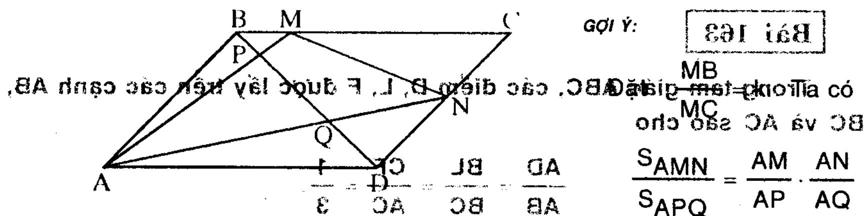
Đáp số: $S_{MPT} = \frac{(k-2)^2}{k^2 - k + 1} \cdot Q$

Bài 164

Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh BC, CD chọn lấy các điểm M, N tương ứng sao cho

$$\frac{CN}{ND} = 2 \cdot \frac{MB}{MC}$$

Đường chéo BD cắt các đoạn thẳng AM, AN theo thứ tự tại các điểm P, Q. Chứng minh $S_{AMN} = 2.S_{APQ}$



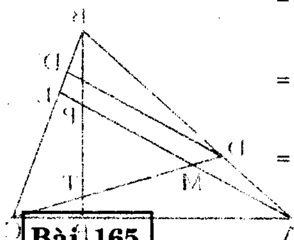
Ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{APQ}} = \frac{AM}{AP}\cdot\frac{AN}{AQ}$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{APQ}} = \left(1+\frac{PM}{AP}\right)\left(1+\frac{QN}{AQ}\right)$$

$$= \left(1+\frac{BM}{AD}\right)\left(1+\frac{ND}{AB}\right) = \left(1+\frac{BM}{BC}\right)\left(1+\frac{ND}{CD}\right)$$

$$= \frac{BC+BM}{BC}\cdot\frac{CD+ND}{CD} = \frac{2BM+MC}{BM+MC}\cdot\frac{2ND+CN}{ND+CN}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1}\cdot\frac{2k+2}{1+2k}$$



Bài 165

Trong hình chữ nhật ABCD, kẻ các phân giác BM và DF của các tam giác ABC, ADC. Độ dài các cạnh của hình chữ nhật là a, b.

Tính S_{BFDM} theo a và b

Đáp số: $S_{BFDM} = \frac{ab(a-b)}{a+b}$

Bài 166

Cho tam giác ABC có diện tích Q. Một điểm M thuộc cạnh AC sao cho AM : MC = p : q

(p và q là hai số dương cho trước)

Tính S_{ABM}, S_{BMC}

GỢI Ý:

Trước hết cần tính các tỉ số $\frac{AM}{AC}$, $\frac{MC}{AC}$

Đáp số : $S_{ABM} = \dfrac{pQ}{p+q}$

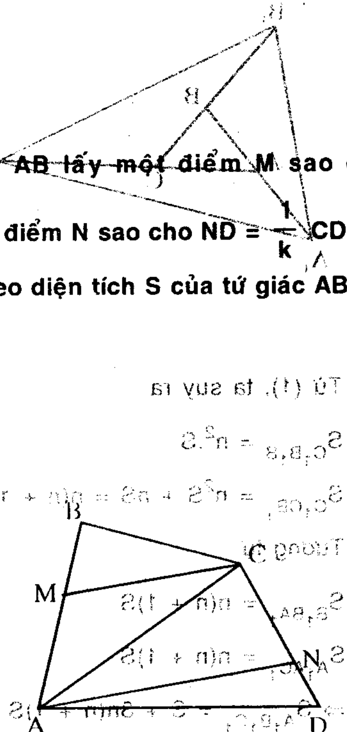
$S_{BMC} = \dfrac{qQ}{p+q}$

Bài 167

Cho tứ giác ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M sao cho $MB = \dfrac{1}{k}AB$ và trên cạnh CD lấy một điểm N sao cho $ND = \dfrac{1}{k}CD$ với $k \neq 0$. Tính diện tích tứ giác AMCN theo diện tích S của tứ giác ABCD.

Gợi ý:

Kẻ đường chéo AC, ta có



$S_{AND} = \dfrac{1}{k} S_{ACD}$

$S_{CBM} = \dfrac{1}{k} S_{ABC}$

$S_{AND} + S_{CBM} = \dfrac{1}{k} S$

$S_{AMCN} = S - (S_{AND} + S_{CBM})$

$\Rightarrow S_{AMCN} = \dfrac{k-1}{k} S.$

Bài 168

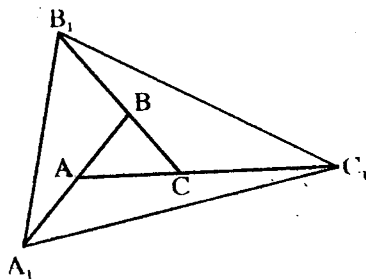
Cho tam giác ABC. Trên tia BA, CB, AC ta dựng các đoạn thẳng

$AA_1 = nAB$

$BB_1 = n\ CB$

$CC_1 = n\ AC.$

Tính tỉ số $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC}$



GỢI Ý:

Đặt BC = a, AC = b, AB = c, $AA_1 = nc$, $BB_1 = na$, $CC_1 = nb$

Ta có

$S_{C_1B_1B} : S_{C_1BC} = na : a = n$ (1)

$S_{C_1BC} : S_{ABC} = nb : b = n$ (2)

Gọi diện tích tam giác ABC là S: $S = S_{ABC}$, từ (2) ta suy ra

$S_{C_1BC} = nS.$

Từ (1), ta suy ra

$S_{C_1B_1B} = n^2.S$

$S_{C_1CB_1} = n^2S + nS = n(n + 1)S$

Tương tự

$S_{B_1BA_1} = n(n + 1)S$

$S_{A_1AC_1} = n(n + 1)S$

$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = S + 3n(n + 1)S$

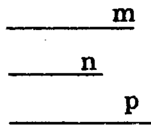
$$\Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = 3n(n + 1) + 1 = 3n^2 + 3n + 1$$

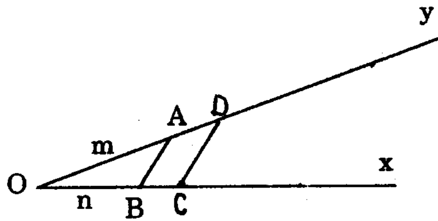
Bài 169

Cho ba đoạn thẳng m, n, p. Dựng đoạn thẳng x sao cho

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$$

GIẢI





Cách dựng:

Dựng một góc xOy bất kì. Trên Oy ta đặt đoạn OA bằng đoạn thẳng m.

Trên Ox, ta đặt đoạn OB bằng đoạn thẳng n và đoạn OC bằng đoạn thẳng p. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB, đường này cắt Oy ở D. Đoạn OD chính là đoạn x phải tìm.

Chứng minh:

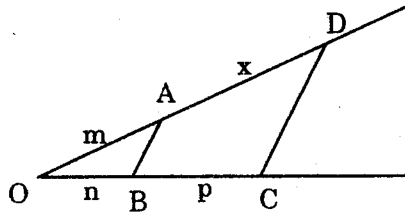
Vì AB // CD, áp dụng hệ quả của định lí Thalès vào tam giác ODC ta có:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} \text{ hay } \frac{m}{OD} = \frac{n}{p}.$$

Vậy OD = x.

Bài toán bao giờ cũng có một lời giải.

Có thể dựng *cách khác* chút ít: thay vì đặt OC = p thì ta đặt BC = p, lúc đó AD = x.



NHẬN XÉT:

Cách dựng thứ hai cho ta một phương pháp để giải một số dạng bài toán sau.

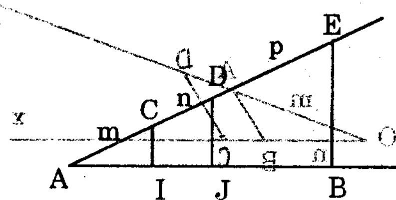
Bài 170

Chia một đoạn thẳng AB thành những đoạn tỉ lệ với những đoạn thẳng cho trước m, n, p.

GỢI Ý:

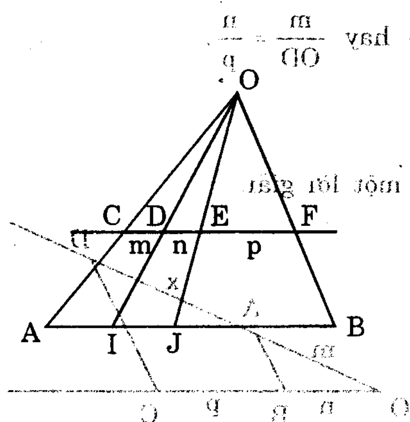
Cách thứ nhất:

Trên cạnh Ax ta đặt AB. Trên cạnh Ay ta đặt liên tiếp các đoạn thẳng AC, CD, DE lần lượt bằng các đoạn thẳng m, n, p. Nối BE. Qua các điểm C, D ta kẻ các đường thẳng song song với EB, cắt AB ở I, J.



Ta có:

$$\frac{AI}{m} = \frac{IJ}{n} = \frac{JB}{p}$$



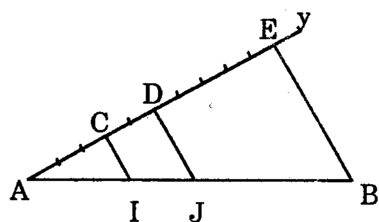
Cách thứ hai:

Ta kẻ một đường thẳng song song với AB và trên đó đặt liên tiếp ba đoạn CD, DE, EF lần lượt bằng các đoạn thẳng m, n, p.

Giả sử AC và BF cắt nhau tại điểm O. Kẻ OD cắt AB ở I và OE cắt AB tại điểm J.

(Nếu AC // BF thì kẻ DI // EJ // AC).

CHÚ Ý: Trong trường hợp m, n, p không phải là những đoạn thẳng mà là những số thì ta có thể chọn một độ dài bất kì làm đơn vị để giải, chẳng hạn cần chia đoạn thẳng AB thành những đoạn thẳng tỉ lệ với các số 3; 2; 5, ta làm như sau:



Trên Ax, đặt đoạn AB.

Ta lấy một độ dài bất kì làm đơn vị, ta đặt trên Oy các đoạn:

AC = 3 (đ.v)

CD = 2 (đ.v)

DE = 5 (đ.v)

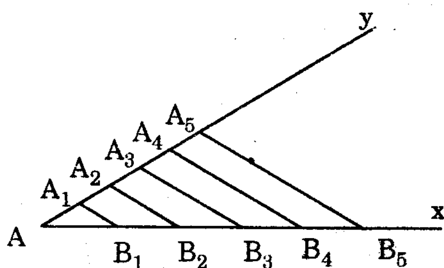
Nối BE và qua C, D kẻ các đường song song với BE, cắt AB ở I và J. Ta có:

$$\frac{AI}{3} = \frac{IJ}{2} = \frac{JB}{5}$$

Trong trường hợp phải chia đoạn AB thành n phần bằng nhau thì ta đặt trên Ay:

$AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n$

Nối A_n với B và vẽ qua các điểm A_1, A_2..., A_{n-1} các đường song song với A_nB ta được các điểm B_1, B_2,..., B_{n-1} và



$$AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B$$

(Trên hình vẽ, ta dựng trong trường hợp n = 5)

Bài 171

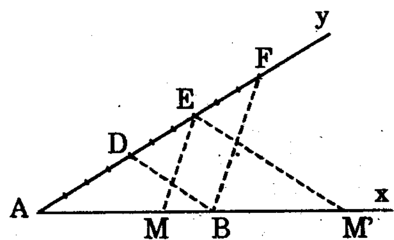
Dựng điểm chia trong và chia ngoài đoạn AB theo tỉ số $\frac{7}{3}$.

GỢI Ý:

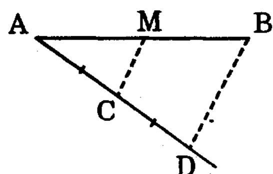
Phải dựng hai điểm M và M' để có:

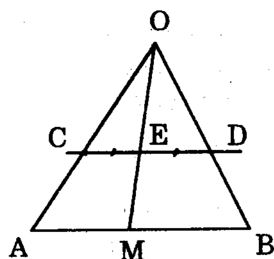
$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{7}{3}.$$

Cách dựng như hình vẽ.



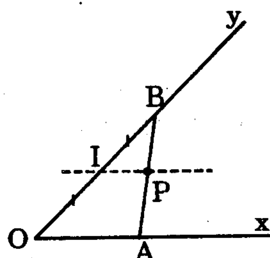
Bạn hãy giải bài toán trong trường hợp tỉ số cho trước là $\frac{3}{7}$; tổng quát là $\frac{m}{n} = 1$, (m, n nguyên dương). Đặc biệt, khi $\frac{m}{n} = 1$, ta có một cách xác định trung điểm của đoạn thẳng AB (khác với cách đã học ở lớp 7) như trong hình bên.





Bài 172

Cho một góc nhọn xOy và một điểm P ở trong góc ấy, hãy dựng qua P một đường thẳng cắt cạnh Ox ở A và Oy ở B sao cho đoạn thẳng AB nhận P làm trung điểm.



GỢI Ý:

Cách dựng:

Qua P kẻ đường song song với Ox, cắt Oy ở I. Trên tia Oy lấy đoạn IB = OI. Nối BP cắt Ox ở A. AB là đoạn thẳng phải dựng.

CHÚ Ý:

Hãy giải bài toán này trong trường hợp tổng quát hơn: điểm P chia AB theo tỉ số $\frac{m}{n}$.

Xét trường hợp điểm P nằm ngoài góc xOy.

Bài 173

Cho hai điểm A, B và một điểm P không ở trên đường thẳng AB. Hãy dựng qua P một đường thẳng sao cho tỉ số các khoảng cách từ điểm A và từ điểm B đến đường thẳng đó bằng $\frac{5}{3}$.

GỢI Ý:

Hãy để ý đến các điểm M, M' là hai điểm chia trong và chia ngoài đoạn AB theo tỉ số $\frac{5}{3}$.

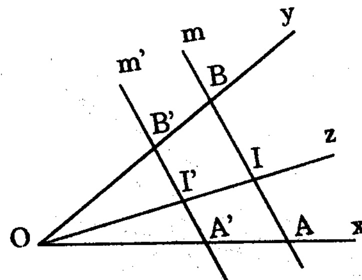
Bài 174

Cho góc xOy và một đường thẳng m cắt Ox ở A, và Oy ở B. Tìm tập hợp trung điểm I của AB khi m di chuyển nhưng luôn song song với một phương cho trước.

GIẢI

1. Phần thuận

Gọi I là trung điểm của AB và Oz là một tia đi qua OI. Gọi m' là đường thẳng song song với m, cắt Ox ở A', Oy ở B'. Gọi I' là trung điểm của A'B'.



Ta có: $\frac{IA}{I'A'} = \frac{IB}{I'B'}$ mà m' // m nên AA', BB' và II' phải

đồng quy tại O hay điểm I' phải nằm trên tia Oz.

2. Phần đảo

Lấy I' bất kỳ trên tia Oz. Qua I', kẻ m' // m; m' cắt Ox ở A', Oy ở B'. Ta có:

$$\frac{IA}{I'A'} = \frac{IB}{I'B'} \Rightarrow I'A' = I'B'$$

nghĩa là I' là trung điểm của A'B'.

Kết luận:

Tập hợp các điểm I là tia Oz.

Bài 175

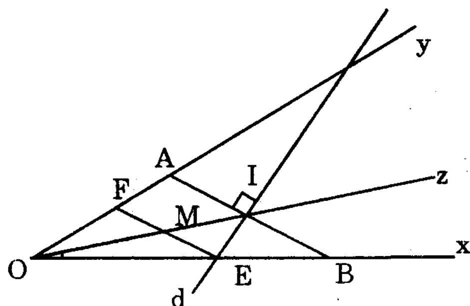
Cho một góc xOy và một đường thẳng bất kì d cắt cả hai cạnh của góc. Tìm một đoạn thẳng AB (A thuộc Oy và B thuộc Ox) sao cho AB vuông góc với d và AB có trung điểm nằm trên đường thẳng d.

GỢI Ý:

Gọi I là trung điểm của AB thì I phải thỏa mãn hai điều kiện:

+ I thuộc d;

+ I thuộc tia Oz.



(tập hợp các trung điểm của các dây song song với một phương cho trước vuông góc với d; xem bài 174. Từ đây ta suy ra cách dựng:

Từ giao điểm E của d với Ox, ta dựng đường thẳng vuông góc với d, cắt Oy ở F. Lấy trung điểm M của EF. OM cắt d ở I, từ I kẻ đường thẳng // với EF cắt Oy ở A và Ox ở B.

Biện luận:

– Nếu d đi qua O và là phân giác góc xOy thì bài toán có vô số nghiệm hình.

– Nếu d đi qua O và không phải là phân giác của xOy thì bài toán vô nghiệm.

NHỮNG BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

Bài 176

Tứ giác ABCD là một hình bình hành tâm O.

1. Có thể nói gì về hình (H) tạo nên bởi trọng tâm của các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB?

2. Có thể nói gì về hình (H') tạo nên bởi trọng tâm của các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA?

3. Có thể nói gì về quan hệ giữa hình (H) với hình (H'), giữa các hình (H), (H') và hình bình hành ABCD?

4. Xét trường hợp đặc biệt khi ABCD là hình chữ nhật, khi ABCD là hình thoi?

THALÈS (Talet)

Thalès sống ở thành phố Milet, một đô thị sầm uất của Hy Lạp thời cổ đại, khoảng từ năm 625 đến năm547 trước Công nguyên.

Thời trẻ ông đã từng sống ở Ai Cập, làm nghề buôn bán. Trong thời gian này ông đã tiếp xúc với nền văn minh và những thành tựu to lớn về toán học và thiên văn học của Ai Cập. Trở về quê hương Hy Lạp, bằng thiên tài của mình, ông đã nghiên cứu xây dựng toán học trở thành một khoa học chặt



chẽ, hệ thống và chính xác. Vì vậy người đời sau tôn vinh ông là Nhà toán học đầu tiên của nhân loại.

Không chỉ với toán học mà ông còn nổi tiếng trong nhiều lĩnh vực khoa học khác như triết học, chính trị, khoa học tự nhiên, thiên văn học, và ông cũng được suy tôn là một trong bảy nhà thông thái (Thất hiền) của Hy Lạp cổ đại.

Ông có thói quen làm việc một cách say sưa, tập trung cao độ. Một câu chuyện vui kể rằng một lần trong khi mải mê quan sát một ngôi sao, Thalès sơ ý bị ngã xuống giếng. Mọi người xúm vào chế nhạo ông, coi ông là "con người chỉ biết nhìn những gì xảy ra ở trên trời, còn những gì ở dưới chân thì không nhìn thấy".

Ông là người đầu tiên dự đoán được hiện tượng nhật thực xảy ra ngày 25 tháng 5 năm 585 trước Công nguyên.

Ông mất năm – 547 trong khi đang tham dự một đại hội thế vận.

Trên tấm mộ chí đặt trước mộ ông, người ta kính cẩn khắc lên dòng chữ sau:

"Nấm mồ này thật nhỏ bé, nhưng vinh quang của con người này – Ông vua của các nhà thiên văn – thì vô cùng to lớn".

NHỮNG ĐIỀU CÓ THỂ BẠN CHƯA BIẾT

1. Thalès đã từng đo chiều cao của Kim tự tháp.

– Hieronymus, một học trò của nhà triết học Aristote thì nói rằng Thalès ghi lại chiều dài của bóng Kim tự tháp vào thời điểm mà chiều dài bóng của ông bằng chiều cao của ông.

– Plutarch thì nói rằng ông đóng một cái cọc xuống đất rồi sử dụng các kiến thức về tam giác đồng dạng.

Tuy vậy, người ta vẫn không biết làm thế nào để Thalès có thể đo chính xác chiều dài của bóng Kim tự tháp (phải tính từ đỉnh của bóng đến tâm của đáy Kim tự tháp).

2. Một số kích thước của Kim tự tháp.

– Chiều cao của một Kim tự tháp là 148m, trong lúc đó khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là 148 triệu km.

– Nếu lấy chu vi Kim tự tháp Kheops chia cho hai lần chiều cao của nó thì ta được số π.

– Các nhà xây dựng Kim tự tháp sử dụng một đơn vị đo lường có độ dài 635,66mm trong lúc đó đường kính Trái Đất là 6356,6 km.

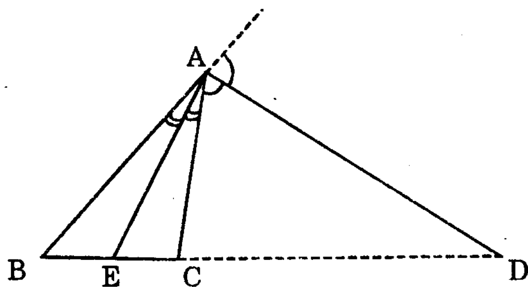
Những sự trùng hợp trên đây không phải là ngẫu nhiên. Chắc chắn nó thể hiện trình độ hiểu biết cao của người Ai Cập cổ đại!

VÀI KẾT QUẢ SUY TỪ ĐỊNH LÍ THALÈS

1. Tính chất đường phân giác

Định lí:

Trong một tam giác, chân các đường phân giác trong và phân giác ngoài của một góc chia cạnh đối diện thành những đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh bên



$$\frac{EB}{EC} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Bốn điểm B, E, C, D hợp thành một hàng điểm điều hòa.

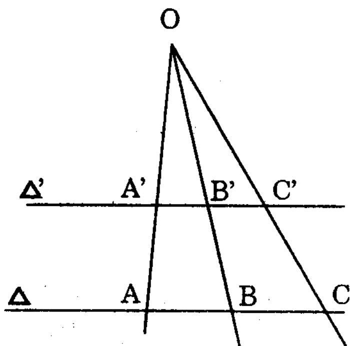
CHÚ Ý: Định lí này được chứng minh dựa vào định lí Thalès bằng cách kẻ thêm các đường thẳng qua C song song với AB.

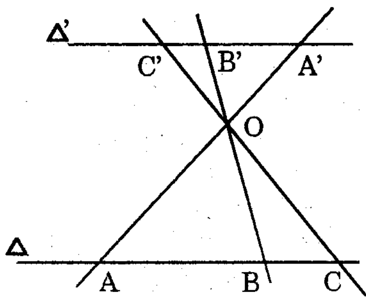
Cũng có thể chứng minh nhờ vào việc sử dụng diện tích các tam giác.

2. Nhiều đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song

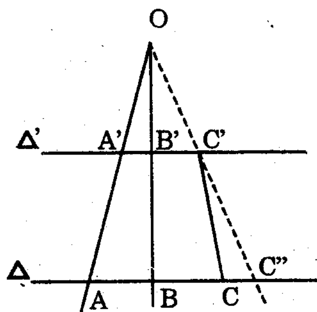
Định lí:

Nhiều đường thẳng đồng quy định ra trên hai đường thẳng song song những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.





$\Delta // \Delta'$ và AA', BB', CC' đồng quy $\Rightarrow \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$



Định lí đảo:

Nếu nhiều đường thẳng định ra trên hai đường thẳng song song những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì chúng đồng quy.

$\Delta // \Delta'$ và $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} \Rightarrow AA', BB', CC'$ *đồng quy.*

(thứ tự của A, B, C trên Δ và A', B', C' trên Δ' là như nhau)

CHÚ Ý:

1. Định lí đảo này được chứng minh bằng phương pháp như phương pháp đã dùng để chứng minh định lí Thalès đảo;

Ta giả sử AA' cắt BB' tại điểm O. Nối O với C', đường thẳng OC' cắt Δ tại điểm C".

Hãy chứng minh C" ≡ C.

2. Định lí đảo này cho ta thêm một cách để chứng minh các đường thẳng đồng quy.

Bài 176

Cho một tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Đường phân giác của góc AIB cắt cạnh AB ở M. Đường phân giác của góc AIC cắt cạnh AC ở N.

a) Chứng minh rằng MN song song với BC.

b) Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để ta có MN = AI?

Trong trường hợp này xác định vị trí của đường thẳng MN trong tam giác ABC.

c) Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để ta có MN ⊥ AI?

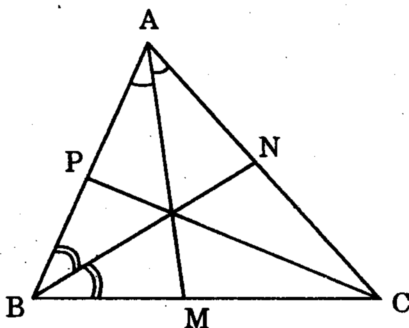
d) Muốn cho tứ giác AMIN là hình vuông thì tam giác ABC phải là tam giác gì?

GỢI Ý:

a) Hãy so sánh các tỉ số:

$$\frac{AM}{BM} \text{ và } \frac{AN}{CN}$$

Bài 177



Cho tam giác ABC và ba đường phân giác AM, BN và CP. Chứng minh rằng:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

GỢI Ý:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}; \frac{NC}{NA} = \frac{BC}{BA}; \frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}.$$

Bài 178

Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn là DC, góc $\widehat{D} = 60°$. Đường phân giác của góc D cắt đường chéo AC tại điểm I chia AC thành hai đoạn theo tỉ số $\frac{4}{11}$ và cắt đáy AB tại điểm M.

Biết MA – MB = 6cm.

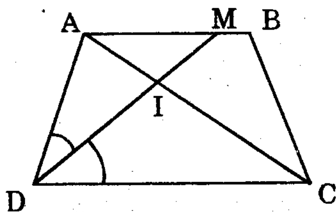
Tính các cạnh đáy AB, DC.

GỢI Ý:

Trước hết hãy chứng minh

DC = AB + AD, để có

DC = AB + AM



Từ đây sẽ tính được tỉ số:

$\frac{MB}{AM} = \frac{3}{4}$ và tính được AM.

Đáp số: DC = 66cm, AB = 42cm.

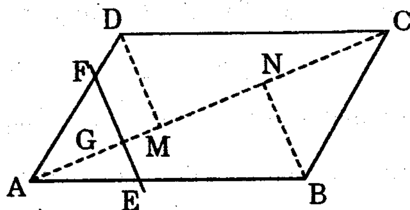
Bài 179

Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng cắt AB ở E, AD ở F và cắt đường chéo AC tại G. Chứng minh hệ thức:

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$$

GỢI Ý:

Hãy kẻ DM // EF, BN // EF và áp dụng định lí Thalès vào các tam giác ADM, ABN.



Bài 180

Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M và trên cạnh CD lấy một điểm N sao cho DN = BM.

Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, DB, AC đồng quy.

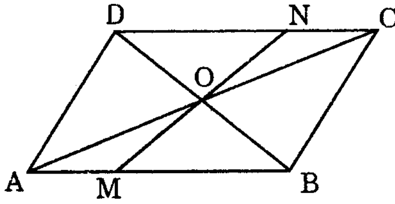
GIẢI

ABCD là hình bình hành cho nên ta có AB = DC.

Theo giả thiết BM = DN.

Vậy AM = CN

Ta được : $\frac{DN}{CN} = \frac{BM}{AM}$



và vì AB // CD, nên ta thấy ba đường thẳng MN, DB, AC định ra trên hai cát tuyến song song những đoạn tương ứng tỉ lệ. Vậy theo định lí Thalès đảo, chúng phải đồng quy.

CHÚ Ý:

1. Bài toán còn có nhiều cách giải khác, chẳng hạn:

a) Nối ON, OM và chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng bằng cách chứng minh Δ DON = Δ BOM.

b) Chứng minh tứ giác DMBN là hình bình hành để đường chéo MN phải đi qua trung điểm O của đường chéo DB.

Qua ba cách giải trên đây, các bạn hãy lưu ý về các phương pháp để:

– Chứng minh ba đường thẳng đồng quy;

– Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

2. Trong bài toán trên đây, nếu ta thay giả thiết ABCD là hình bình hành bằng giả thiết ABCD là hình thang thì các điểm M,N phải chọn như thế nào để cho đường thẳng MN đi qua giao điểm của hai đường chéo AC, BD?

Bài 181

Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB có một điểm D và trên cạnh AC có một điểm E sao cho AD = $\frac{1}{4}$ AB; AE = $\frac{1}{4}$ AC. Gọi O là giao điểm của BE và CD.

1. Chứng minh DE = $\frac{1}{4}$ BC; OD = $\frac{1}{4}$ OC;

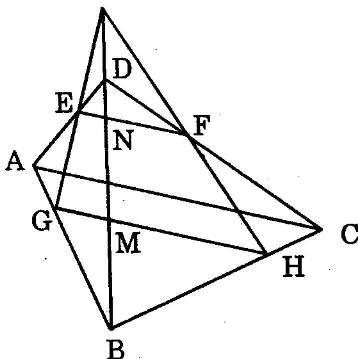
2. Gọi M là trung điểm của cạnh BC; N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh tỉ lệ thức:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{OM}{ON}.$$

Bài 182

Cho ABCD là một tứ giác lồi. Người ta kẻ hai đường song song với đường chéo AC, cắt các cạnh BA, BC lần lượt tại G và H; cắt các cạnh DA, DC lần lượt tại E và F.

Chứng minh rằng các đường thẳng GE, HF, BD đồng quy.



GỢI Ý:

Hãy chứng minh:

$$\frac{NE}{NF} = \frac{MG}{MH}$$

CHÚ Ý: Các bạn hãy xét trường hợp đặc biệt của bài toán khi E, F, G, H lần lượt là các trung điểm của các cạnh AD, DC, AB, BC.

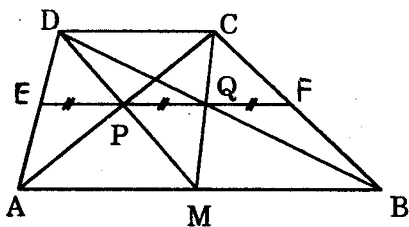
Bài 183

Cho một hình thang ABCD. Hãy tìm một đoạn thẳng EF song song với hai đáy AB, DC (E ở trên AD, F trên BC) sao cho EF bị hai đường chéo AC, BD cắt ra làm ba đoạn thẳng bằng nhau.

Bài toán có mấy lời giải?

GỢI Ý:

Gọi P, Q theo thứ tự là các giao điểm của EF với AC, BD



Giả sử ta có

EP = PQ = QF

Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Theo giả thiết ta có

EQ // AB, P là trung điểm của EQ

Từ đây suy ra ba điểm D, P, M thẳng hàng hay P là giao điểm của DM với AC.

Tương tự, Q là giao điểm của CM với DB.

Cách vẽ đoạn EF.

Nối DM cắt AC tại P; nối CM cắt DB tại Q. Đường thẳng PQ cắt AD tại E và cắt BC tại F.

Bài toán có 2 lời giải. (Chú ý tới điểm N, là trung điểm của cạnh DC).

Bài 184

Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB = b, đáy nhỏ CD = b' ; gọi a, c theo thứ tự là độ dài các cạnh AD, BC.

1. Chứng minh rằng giao điểm O của các đường thẳng AD, BC; giao điểm I của các đường chéo và hai trung điểm M, M' của các cạnh đáy AB, CD cùng nằm trên một đường thẳng.

2. Tính các cạnh của tam giác AOB.

3. Tính các tỉ số $\frac{OM}{OM'}$; $\frac{IM}{IM'}$

So sánh các tỉ số này.

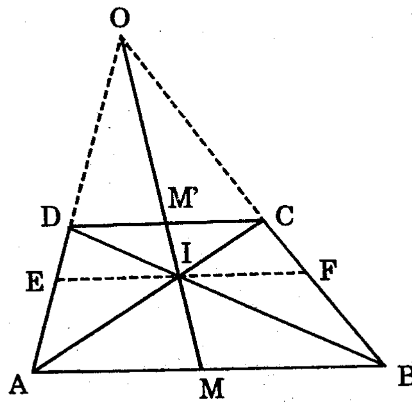
4. Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm với các cạnh AD, BC của đường thẳng qua I và song song với hai đáy.

Tính IE, IF

GỢI Ý

1. Các đường thẳng AC, BD, MM' định ra trên hai đường thẳng song song AB, CD các đoạn thẳng tỉ lệ nên chúng đồng quy tại một điểm, suy ra $I \in MM'$

Tương tự, ta có $O \in MM'$



2. Ta có:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{OA}{OA - OD} = \frac{AB}{AB - DC} \Rightarrow OA = \frac{ab}{b - b'}$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{OB}{OB - OC} = \frac{AB}{AB - DC} \Rightarrow OB = \frac{bc}{b - b'}$$

3. Ta có $\frac{OM}{OM'} = \frac{b}{b'} = \frac{IM}{IM'}$

4. Ta có $IE = IF = \frac{bb'}{b + b'}$

CHÚ Ý: Từ kết quả của câu 1, hãy phát biểu một tính chất của hình thang sau đó nghiên cứu thêm trường hợp đặc biệt, khi ABCD là hình thang cân để có thêm một tính chất của hình thang cân.

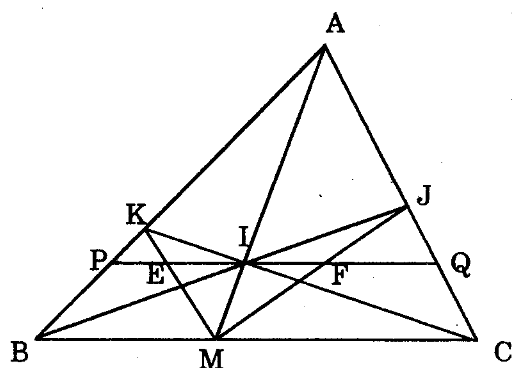
Bài 185

Cho tam giác ABC; trên cạnh BC có một điểm M và trên AM lấy một điểm I, BI cắt cạnh AC tại J và CI cắt cạnh AB tại K. Qua I kẻ đường thẳng song song với cạnh BC, đường này cắt AB, MK, MJ, AC lần lượt tại các điểm P, E, F, Q.

Chứng minh IE = IF.

GỢI Ý:

Áp dụng định lí Thalès ta có:



$$\frac{IP}{IQ} = \frac{MB}{MC} \quad (1)$$

$$\frac{IE}{IP} = \frac{CM}{CB} \quad (2)$$

$$\frac{IQ}{IF} = \frac{BC}{BM} \quad (3)$$

Nhân (1), (2), (3) vế với vế, ta có:

$$\frac{IP}{IQ} \cdot \frac{IE}{IP} \cdot \frac{IQ}{IF} = \frac{MB}{MC} \cdot \frac{CM}{CB} \cdot \frac{BC}{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{IE}{IF} = 1 \Rightarrow IE = IF.$$

NHẬN XÉT: Vì điểm M lấy tùy ý trên cạnh BC nên ta xét một vài vị trí đặc biệt của M.

1. Khi M trùng với chân đường cao kẻ từ đỉnh A, tức là AM ⊥ BC thì rõ ràng IM ⊥ EF. Kết hợp với IE = IF ta có một kết luận mới là tam giác EMF cân, đỉnh M.

2. Khi M trùng với trung điểm của cạnh BC, tức là AM là đường trung tuyến thuộc cạnh BC thì ta có ngay PI = QI. Kết hợp với IE = IF, ta suy ra kết luận EP = FQ.

NHỮNG BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

Bài 186

Cho tứ giác lồi ABCD; M ∈ AB, N ∈ BC, P ∈ CD, Q ∈ DA và các tỉ số:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB}, \quad \frac{CP}{PD} = \frac{AQ}{QD}$$

2. ABCD là hình bình hành tâm O. Qua O kẻ một đường thẳng cắt đường thẳng AB tại điểm M, cắt đường thẳng AD tại điểm N, cắt đường thẳng BC tại điểm P, cắt đường thẳng CD tại điểm Q.

§2. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Khái niệm tam giác đồng dạng

a) Định nghĩa

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{A'}\ ;\ \widehat{B} = \widehat{B'}\ ;\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC}\end{array}\right\} \underset{đn}{\Leftrightarrow} \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

b) Tính chất

Quan hệ đồng dạng có các tí. h chất:

– *Phản xạ* : $\Delta ABC \backsim \Delta ABC$ (1)

– *Đối xứng* : $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Rightarrow \Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (2)

– *Bắc cầu:*

$$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \text{ và } \Delta A'B'C' \backsim \Delta A''B''C''$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A''B''C'' \quad (3)$$

c) Chú ý:

Tính chất (2) cho phép chúng ta khi gặp $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ thì có thể nói là hai tam giác ấy đồng dạng với nhau.

d) Định lí

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$$

2. Các trường hợp đồng dạng của tam giác

Định lí 1

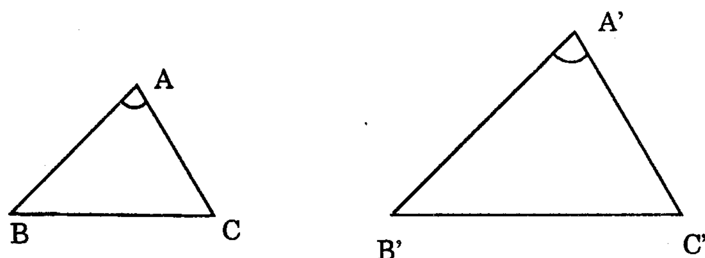
$$\widehat{A} = \widehat{A'} \text{ và } \widehat{B} = \widehat{B'}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

Định lí 2

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ và } \widehat{A} = \widehat{A'}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$



Định lí 3

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

3. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

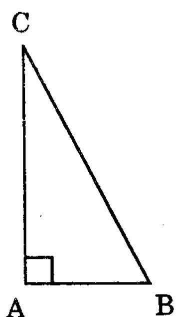
$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ *nếu:*

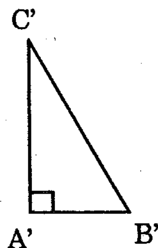
a) $\widehat{C} = \widehat{C'}$ (hoặc $\widehat{B} = \widehat{B'}$)

b) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

c) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

$\left(\text{hoặc } \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}\right)$





CHÚ Ý: Khi hai tam giác ABC và A'B'C' đồng dạng với nhau thì tỉ số k giữa các cạnh tương ứng

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$$

được gọi là *tỉ số đồng dạng.*

Đặc biệt khi k = 1 thì ΔABC = ΔA'B'C'. Như vậy, trường hợp các tam giác bằng nhau là trường hợp đặc biệt của các tam giác đồng dạng.

Bài 187

Chứng minh rằng nếu hai tam giác đồng dạng thì:

a) Tỉ số hai đường phân giác tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.

b) Tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.

c) Tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.

d) Tỉ số các chu vi bằng tỉ số đồng dạng.

e) Tỉ số các diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

GIẢI

a) Giả sử ΔABC ∽ ΔA'B'C'.

Kẻ phân giác AD và A'D' của các góc A và góc A'.

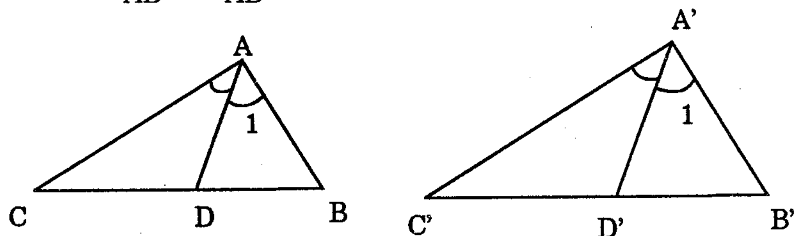
Vì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ nên:

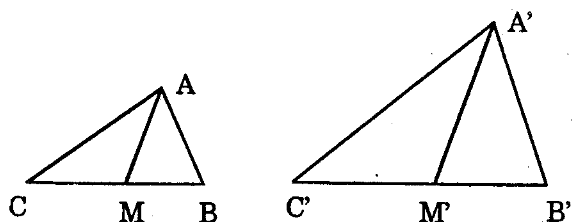
$\widehat{A} = \widehat{A'}$, ta suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A'}_1$

Ta cũng có $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta A'B'D'$ (trường hợp 1)

Cho ta $\dfrac{A'D'}{AD} = \dfrac{A'B'}{AB}$.





b) Ta kẻ các trung tuyến tương ứng AM và A'M'.

Do $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ nên:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{A'B'}{B'M'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta A'B'M'$$

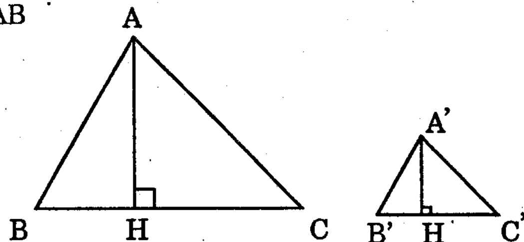
cho ta $\dfrac{A'M'}{AM} = \dfrac{A'B'}{AB}$.

c) Kẻ các đường cao tương ứng AH, A'H'.

Do $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

nên $\widehat{B} = \widehat{B'}$ và hai tam giác vuông ABH và A'B'H' đồng dạng, cho ta

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{A'B'}{AB}.$$



d) Gọi p và p' là chu vi của ΔABC và của $\Delta A'B'C'$.

$$p = AB + BC + CA, \quad p' = A'B' + B'C' + C'A'$$

Vì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ nên:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B' + B'C' + C'A'}{AB + BC + CA} = \frac{p'}{p}$$

e) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\, BC \,.\, AH$

$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\, B'C' \,.\, A'H'$

Theo kết quả câu c) : $\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$

Suy ra $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2.$

Bài 188

Cho một tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm của cạnh AC. Các đường trung trực của cạnh BC và AC cắt nhau tại điểm O; H là trực tâm và G là trọng tâm của tam giác.

Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác ABH và MNO đồng dạng.

b) Hai tam giác AHG và MOG đồng dạng.

c) Ba điểm H, G, O thẳng hàng.

GIẢI

a) OM // AH.

MN là đường trung bình nên: MN // AB.

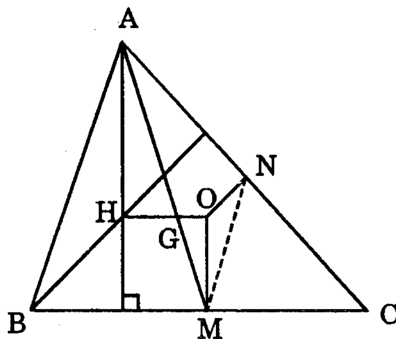
Hai góc nhọn HAB và OMN có các cạnh tương ứng song song. Vậy

$$\widehat{HAB} = \widehat{OMN}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\widehat{HBA} = \widehat{ONM}.$$

Vậy ΔABH ∽ Δ MNO.



b) G là trọng tâm của tam giác nên

$$\frac{MG}{AG} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

ΔABH ∽ ΔMNO nên:

$$\frac{OM}{AH} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\frac{MG}{AG} = \frac{OM}{AH}.$$

Mặt khác OM // AH nên $\widehat{HAG} = \widehat{OMG}$.

Vậy $\Delta AHG \backsim \Delta MOG$.

c) Từ b), suy ra:

$$\widehat{AGH} = \widehat{OGM}.$$

Hai góc này bằng nhau mà đã có hai cạnh AG, GM nằm trên đường thẳng AM, hai cạnh GH và GO nằm ở hai phía của AM nên cũng phải nằm trên một đường thẳng, nghĩa là ba điểm H, G, O thẳng hàng.

CHÚ Ý:

Vì O là giao điểm của hai đường trung trực của các cạnh BC, AC nên ta có

$$OA = OB = OC.$$

Do vậy, nếu ta lấy O làm tâm và quay một đường tròn bán kính OA thì đường tròn này đi qua cả B và C. Người ta gọi đường tròn này là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ kết quả câu c) ta rút ra kết luận:

Trong một tam giác, trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp nằm trên một đường thẳng.

Đường thẳng này được gọi là <u>đường thẳng Euler</u> (Ơle) để ghi nhớ một trong nhiều phát minh của Euler (1707 – 1783), một trong những nhà toán học lỗi lạc nhất của mọi thời đại.

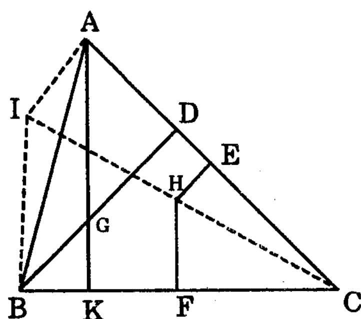
Bài 189

Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại G. Vẽ các đường trung trực HE, HF của AC và BC.

Chứng minh rằng BG = 2HE;

AG = 2HF.

(Đề thi học sinh giỏi toán lớp 8 toàn quốc năm 1981)



GỢI Ý:

Cách 1:

Xem bài 188

Cách 2:

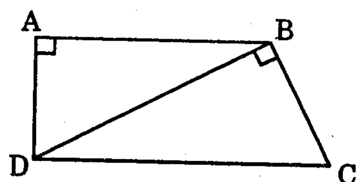
Nối CH và kéo dài, lấy trên đó điểm I sao cho HI = CH. Chứng minh tứ giác AIBG là hình bình hành.

Bài 190

Cho một hình thang vuông ABCD (AB // DC, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$). Đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC.

Chứng minh hệ thức: $BD^2 = AB.DC$.

GỢI Ý:



Chứng minh ΔABD ∽ ΔBCD

NHẬT XÉT

– Bài toán có hai giả thiết:

– ABCD là hình thang vuông

– BD ⊥ BC.

và một kết luận $BD^2 = AB.DC$

Hãy lấy kết luận làm một giả thiết, kết hợp với một trong hai giả thiết trên và lấy giả thiết còn lại làm kết luận thì ta có những bài toán mới (ta tạm gọi là bài toán đảo của bài toán trên).

Bài toán đảo 1:

Nếu trong một hình thang vuông, một đường chéo là trung bình nhân của hai đáy thì đường chéo này vuông góc với một trong các cạnh bên.

Bài toán đảo 2:

Nếu trong một hình thang, một đường chéo vuông góc với một cạnh bên và đường chéo này là trung bình nhân của hai đáy thì hình thang đã cho là hình thang vuông.

Bạn hãy chứng minh các mệnh đề trên đây.

Bài 191

Cho tam giác cân ABC (AB = AC) và O là trung điểm của cạnh đáy BC. Một điểm D lưu động trên cạnh AB. Lấy một điểm E trên cạnh AC sao cho:

$$CE = \frac{OB^2}{BD}.$$

Chứng minh rằng:

a) hai tam giác DBO và OCE đồng dạng.

b) tam giác DOE cũng đồng dạng với hai tam giác trên.

c) DO là phân giác của góc BDE;

EO là phân giác của góc CED.

d) khoảng cách từ điểm O đến đoạn ED không đổi khi D lưu động trên AB.

GỢI Ý:

a) Hãy viết hệ thức đã cho dưới dạng:

$$\frac{CE}{OB} = \frac{OB}{BD}$$

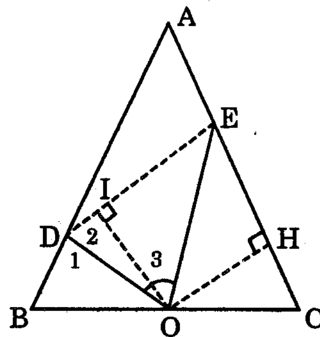
b) Từ kết quả câu a), suy ra

$\widehat{O_3} = \widehat{B} = \widehat{C}$

c) Từ kết quả câu b), suy ra

$\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$, $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$

d) Từ kết quả câu c) suy ra OI = OH.



Bài 192

Cho tam giác ABC, trong đó $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ là các góc nhọn. Các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau ở H.

a) Chứng minh hệ thức A'A.A'H = A'B.A'C.

b) G là trọng tâm của tam giác. Giả sử đường thẳng GH song song với cạnh đáy BC.

Chứng minh hệ thức: $A'A^2 = 3A'B.A'C$

GỢI Ý:

a) Dựa vào các cặp tam giác đồng dạng sau:

BA'H và BB'C CAA' và CB'B.

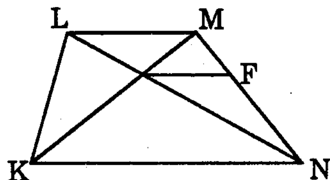
b) Nếu GH // BC thì ta có

$$A'H = \frac{A'A}{3}.$$

Bài 193

Cho một hình thang KLMN (KN // LM). Gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Qua E ta kẻ một đường song song với LM, cắt MN ở F. Chứng minh hệ thức

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{KN} + \frac{1}{LM}$$



GỢI Ý:

Tính các tỉ số

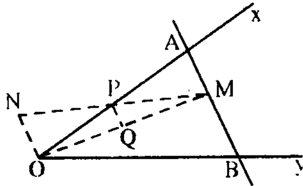
$$\frac{EF}{LM} ; \frac{EF}{KN}$$

Bài 194

Cho một góc xOy và một điểm M ở trong góc ấy. Hãy dựng qua M một cát tuyến cắt hai cạnh của góc ở A và B sao cho tổng $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ là lớn nhất.

(Đề thi vô địch toán Mỹ, 1979)

GỢI Ý:



Cách 1:

Vẽ MN // Oy, ON // AB. Từ giao điểm của OA và MN, kẻ PQ // AB.

Theo bài 193

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{PQ}$$

Do đó $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{PQ}$ đạt giá trị lớn nhất khi PQ nhỏ nhất. Vì OM cố định, P cố định nên PQ nhỏ nhất khi và chỉ khi $PQ \perp OM$, tức $AB \perp OM$.

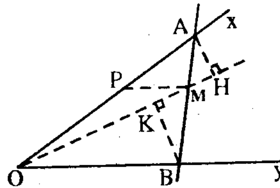
Cách 2:

Chứng minh rằng $\frac{1}{S_{OMA}} + \frac{1}{S_{OMB}} = \frac{1}{S_{OMP}}$

Dựa vào. $\frac{S_{OMA}}{S_{OMP}} = \frac{AO}{OP} = \frac{AB}{MB} = \frac{S_{OAB}}{S_{OMB}}$

Tổng $\frac{1}{S_{OMA}} + \frac{1}{S_{OMB}}$ không đổi,

do đó $\frac{1}{AH} + \frac{1}{BK}$ không đổi. $MA \geq AH$, $MB \geq BK$, suy ra vị trí của AB cần tìm là $AB \perp OM$.



Biện luận và mở rộng bài toán:

– Các bạn hãy xét xem khi nào bài toán có lời giải, khi nào không?

– Nếu đổi giả thiết một chút: "cát tuyến qua M cắt một cạnh của góc xOy và cắt cạnh kia kéo dài", thì bài toán có thể giải thế nào?

Bài 195

Cho hình thang ABCD, các đường chéo AC và BD giao nhau tại điểm O. Qua O ta kẻ một đường thẳng song song với các đáy AD và BC, cắt các cạnh bên tại E và F. Chứng minh rằng EF là trung bình điều hòa của hai đáy.

GỢI Ý:

Áp dụng kết quả của bài 193 để chứng minh hệ thức:

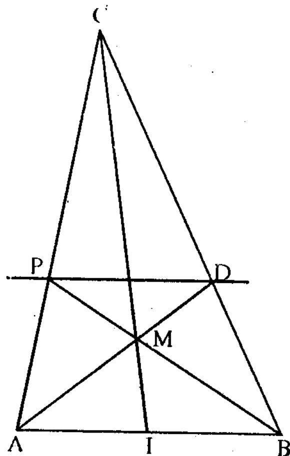
$$\frac{2}{EF} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC}$$

Bài 196

Một cách dựng đường song song của I. Steiner *(1796 – 1863, nhà toán học Đức)*

Cho một đoạn thẳng AB cùng trung điểm I của nó và một điểm P ngoài đường thẳng AB. Hãy dựng qua P đường thẳng song song với AB, mà chỉ dùng thước thẳng.





Cách dựng:

Kẻ tia AP, trên tia đó lấy một điểm C ở ngoài đoạn thẳng AP. Kẻ CI, CB và PB, các đoạn thẳng BP và CI cắt nhau tại M. Đường thẳng AM cắt CB tại D, và PD là đường thẳng phải dựng.

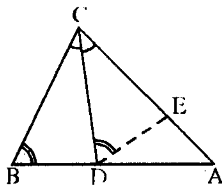
Chứng minh PD // AB (xin dành cho bạn đọc)

Bài 197

Trong tam giác ABC, phân giác của góc ACB cắt cạnh AB tại một điểm D. Chứng minh rằng $CD^2 < CA.CB$.

(Đề thi vô địch toán Hungari – 1917)

GỢI Ý:



Hãy chứng minh rằng với điều kiện của bài toán thì có thể tìm trên AC một điểm E để $\widehat{CDE} = \widehat{CBD}$.

Sau đó so sánh các cặp tam giác CBD và CDE.

Bài 198

Giả sử AC là đường chéo lớn của hình bình hành ABCD. Từ C kẻ các đường CE, CF vuông góc với AB, AD. Chứng minh rằng:

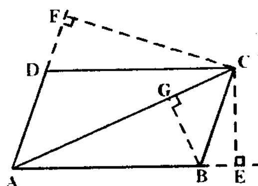
$$AB.AE + AD.AF = AC^2$$

(Đề thi vô địch toán Hungari – 1918)

GỢI Ý:

Từ B kẻ BG ⊥ AC (chứng minh G là điểm thuộc đoạn thẳng AC).

Sau đó so sánh các cặp tam giác AGB và AEC; BGC và CFA.



Bài 199

Chứng minh rằng trong một hình bình hành các khoảng cách từ một điểm nằm trên một đường chéo đến hai cạnh kề bên thì tỉ lệ nghịch với độ dài các cạnh ấy.

Bài 200

Qua một điểm O tùy ý ở trong tam giác ABC kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC và BC tại D và E, đường thẳng song song với AC cắt AB và BC tại F và K, đường thẳng song song với BC cắt AB và AC ở M và N.

Chứng minh rằng:

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1$$

GIẢI

Vì FK // AC nên $\frac{AF}{AB} = \frac{KC}{BC}$ (1)

$\Delta OEK \backsim \Delta ABC$ cho ta

$$\frac{KO}{CA} = \frac{KE}{BC}$$

Tứ giác OKCN là hình bình hành nên OK = CN. Vậy

$$\frac{CN}{CA} = \frac{KE}{BC} \quad (2)$$

Thay các kết quả (1) và (2) vào vế trái đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = \frac{KC}{BC} + \frac{BE}{BC} + \frac{KE}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

Bài 201

Cho một tam giác ABC. Qua một điểm O tùy ý trong tam giác ta kẻ các đường thẳng AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, và C_1.

Chứng minh hệ thức:

$$\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$$

GIẢI

Kẻ đường cao AH và từ O kẻ OI ⊥ BC.

Ta có OI // AH.

$$\frac{OA_1}{AA_1} = \frac{OI}{AH} \qquad (1)$$

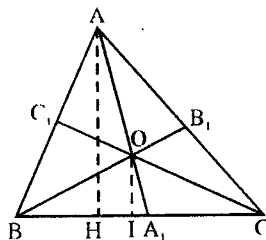
Mặt khác:

$$\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot OI}{\frac{1}{2}BC \cdot AH} = \frac{OI}{AH} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{OA_1}{AA_1} \qquad (3)$$

Chứng minh tương tự, ta có:



$$\frac{S_{COA}}{S_{ABC}} = \frac{OB_1}{BB_1} \qquad (4)$$

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{OC_1}{CC_1} \qquad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta có:

$$\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB}}{S_{ABC}}$$

Vậy $\dfrac{OA_1}{AA_1} + \dfrac{OB_1}{BB_1} + \dfrac{OC_1}{CC_1} = 1$

Bài 202

Qua đỉnh C của tam giác vuông ABC kẻ một đường thẳng d vuông góc với trung tuyến CM thuộc cạnh huyền AB. Gọi A_1, B_1 là hình chiếu của A, B trên d.

Chứng minh:

1. $S_{AA_1B_1B} = 2 \cdot S_{ABC}$

2. $4 \cdot AA_1 \cdot BB_1 = A_1B_1^2$.

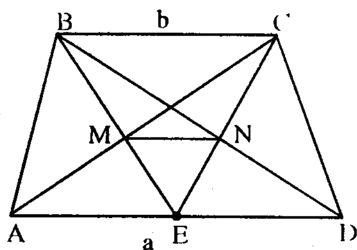
Bài 203

Cho hình thang ABCD (AD // BC); AD > BC. Gọi E là trung điểm của đáy lớn AD; EB cắt AC ở M; EC cắt BD ở N.

1. Tính độ dài MN theo hai đáy

2. Tìm tỉ số hai cạnh đáy để MN có giá trị lớn nhất.

GIẢI (vắn tắt)



1. Đặt AD = a, BC = b

- $\Delta AME \backsim \Delta CMB$:

$$\frac{EM}{MB} = \frac{AE}{BC} = \frac{a}{2b} \quad (1)$$

- $\Delta END \backsim \Delta CNB$:

$$\frac{EN}{NC} = \frac{a}{2b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) : $\frac{EM}{MB} = \frac{EN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$.

- $\Delta BEC \backsim \Delta MEN$:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{EM}{BE} \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) ta tính được

$$MN = \frac{ab}{a+2b}$$

2. Gọi $\frac{a}{b} = k$, $k \geq 1$ thì

$$MN = \frac{a}{k+2}$$

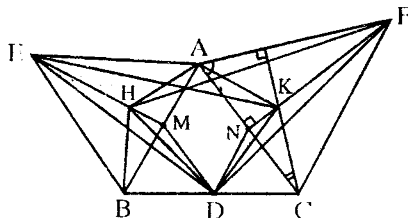
Rõ ràng MN đạt giá trị lớn nhất khi k = 1, tức là a = b. Lúc bấy giờ tứ giác ABCD là hình bình hành. $\left(MN = \frac{a}{3}\right)$.

Bài 204

Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng hai tam giác cân đồng dạng ABE, ACF với các cạnh đáy theo thứ tự là AB, AC. Gọi H là trực tâm của tam giác ABE; K là trực tâm của tam giác ACF và D là trung điểm của cạnh BC.

Chứng minh hai tam giác DHF và DKE đồng dạng

GIẢI



Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AB, AC.

Theo giả thiết $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$

Suy ra $\widehat{HBA} = \widehat{HAB} = \widehat{KAC} = \widehat{ACK}$

mà $\widehat{ACK} + \widehat{CAF} = 90^o$

cho ta $\widehat{KAC} + \widehat{CAF} = 90^o$

DN // AB $\Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{BAC}$

Từ các kết quả trên, suy ra $\widehat{HAF} = 90^o + \widehat{BAC} = \widehat{DNF}$

Mặt khác $\widehat{CAK} = \widehat{AFN} = \widehat{CFK}$, cho ta các tam giác vuông AFN, KAN và HAM đồng dạng;

$$\frac{AF}{AH} = \frac{FN}{AM}$$

Do AM = ND nên

$$\frac{AF}{AH} = \frac{FN}{ND}$$

Suy ra: Δ AHF ∽ Δ NDF $\Rightarrow \widehat{AFH} = \widehat{NFD}$

Từ đây, ta có $\widehat{AFN} = \widehat{HFD}$, kết hợp với $\dfrac{AE}{FN} = \dfrac{HF}{DF}$

ta có: Δ DHF ∽ Δ NAF (1)

tương tự, ta có Δ NAF ∽ Δ MAE (2)

Δ MAE ∽ Δ DKE (3)

Từ (1) (2) (3) ta suy ra Δ DHF ∽ Δ DKE.

NHẬN XÉT:

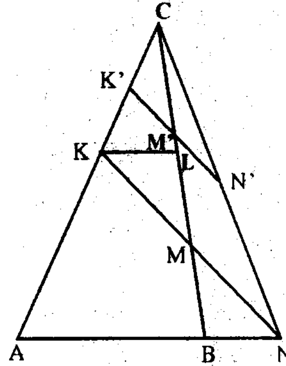
Trong chứng minh trên, để chứng minh Δ DHF ∽ Δ DKE ta chứng minh Δ DHF và Δ DKE đồng dạng với các tam giác đồng dạng với nhau. Ta đã sử dụng tính chất bắc cầu của phép đồng dạng: "Hai tam giác cùng đồng dạng với một tam giác thứ ba thì đồng dạng với nhau".

Bài 205

Cho một tam giác ABC không đều. Hãy chia tam giác này thành ba phần sao cho một phần là một tam giác đồng dạng với ABC, hai phần còn lại có thể ghép thành một tam giác cũng đồng dạng với tam giác ABC.

GỢI Ý:

Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$. Lấy trên cạnh AC, BC theo thứ tự hai điểm K, M sao cho $\widehat{AKM} = \widehat{B}$ và KM cắt đường thẳng AB tại điểm N với KM = MN (ta dựng các điểm này như sau: Lấy trên AC một điểm K' tùy ý. Tìm trên CB một điểm M' sao cho $\widehat{AK'M'} = \widehat{ABM'}$. Trên đoạn kéo dài của K'M' lấy điểm N' sao cho M'N' = K'M'. Đường thẳng CN' cắt AB tại N. Dựng qua N đường thẳng song song với N'K'. Như vậy ta có được hai điểm K, M thỏa mãn $\widehat{AKM} = \widehat{B}$).



Kẻ KL // AB và như vậy ta đã chia tam giác ABC làm 3 phần:

Δ CKL ∽ Δ ABC	(1)
Δ MKL	(2)
Tứ giác AKMB	(3)

Đưa tam giác MKL đến vị trí của tam giác BMN, ta sẽ gộp hai phần (2) và (3) thành một tam giác đồng dạng với tam giác ABC.

Bài 206

Cho tam giác ABC với hai đường cao AD và CE. Người ta dựng ra ngoài tam giác hình vuông ACPQ, hai hình chữ nhật CDMN (với CN = CB) và AEKL (với AL = AB). Chứng minh rằng diện tích hình vuông ACPQ bằng tổng diện tích hai hình chữ nhật CDMN và AEKL.

(Đề thi Olympic toán Mascơva, lớp 9, 1998)

GỢI Ý

Dụng đường cao BS. Gọi T là giao điểm của tia BS và PQ. Chứng minh hai hình chữ nhật ASTQ và AEKL có diện tích bằng nhau (suy từ hai tam giác đồng dạng ABS và AEC).

NHỮNG BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

Bài 207

Cho tam giác ABC, kẻ

BH ⊥ AC và HP ⊥ AB

CK ⊥ AB và KQ ⊥ AC.

GỢI Ý

Tìm các tam giác đồng dạng và các đường thẳng song song.

Bài 208

Qua đỉnh C của hình bình hành ABCD kẻ một đường thẳng cắt đường chéo BD ở điểm E, cắt cạnh AB ở điểm G và cắt đường thẳng DA ở điểm F.

GỢI Ý:

Tìm các cặp tam giác đồng dạng và tìm các hệ thức liên hệ giữa các đoạn thẳng có mặt trên hình vẽ.

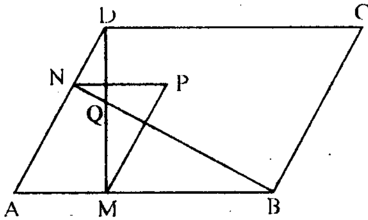
Bài 209

Hình vẽ bên được cho với các thông tin:

– ABCD là hình bình hành

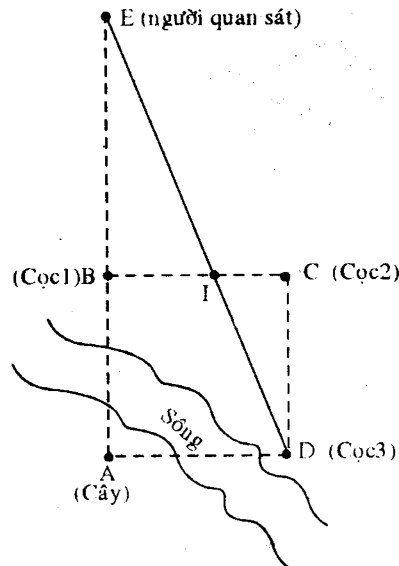
– AMPN là hình bình hành

– Q là giao điểm của BN và DM.



MỘT BÀI TOÁN CỔ CỦA TRUNG QUỐC

Để tính khoảng cách từ một điểm đến một cái cây mà không thể đến được tận gốc cây, người ta trồng thêm 3 cái cọc, mỗi cọc cách nhau 1 trượng sao cho các cọc cùng với cây tạo thành một hình vuông nằm về phía bên trái người quan sát. Biết khoảng cách từ cọc thứ hai đến điểm I là 3 tấc. Tìm khoảng cách từ người quan sát đến các cây.



Chú thích về đơn vị đo lường

– Một trượng: độ dài 3,2m

– Một tấc: độ dài 0,32m.

GỢI Ý:

Sử dụng cặp tam giác đồng dạng EAD và ICD để có $EA = \frac{AD \cdot CD}{IC}$.

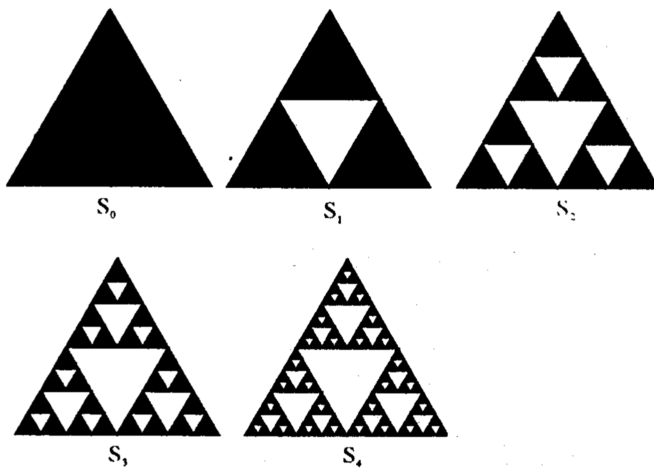
• TAM GIÁC SIERPINSKI (hay thảm Sierpinski)

Lấy một hình tam giác đều S_0. Chia S_0 ra 4 tam giác đều bằng nhau, rồi xóa đi tam giác đều ở giữa, ta được hình S_1. Lại chia mỗi tam giác đều trong S_1 ra bốn tam giác đều bằng nhau, rồi xóa đi tam giác ở giữa, ta có hình S_2. Bằng cách



đó, ta có S_3, S_4... *Quá trình này được tiếp tục mãi, và hình có được gọi là* tam giác Sierpinski *hay* thảm Sierpinski *(do nhà toán học Balan V. Sierpinski, 1882 - 1969, xây dựng).*

Ta thấy: S_1 *gồm 3 phần, mỗi phần* **đồng dạng** *với* S_0 *theo tỉ số đồng dạng* $\frac{1}{2}$; S_2 *gồm 3 phần, mỗi phần* **đồng dạng** *với* S_1 *theo tỉ số* $\frac{1}{2}$, ... *Thảm Sierpinski có tính chất* tự đồng dạng, *nghĩa là một bộ phận của nó có thể coi là một bản sao thu nhỏ của nó. Thảm Sierpinski là một ví dụ về* fractal. Hình học fractal *mới ra đời mấy chục năm nay, nhưng đã có ý nghĩa rất quan trọng đối với toán học và nhiều ngành khác.*



• ĐỊNH LÍ CEVA VÀ ĐỊNH LÍ MENELAUS

Bài 210

Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, ta lấy các điểm tương ứng P, Q, R. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để AP, BQ và CR đồng quy là có hệ thức:

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB}=1 \qquad (1) \qquad \textit{(Định lí Ceva)}$$

G.Ceva (Xêva), 1648 – 1734, nhà toán học Ý.

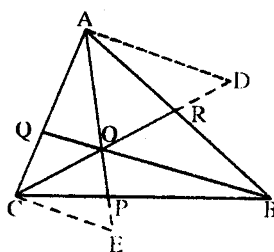
GIẢI

1. Điều kiện cần

Ta phải chứng minh rằng:

AP, BQ, CR đồng quy ⇒ (1)

Qua C và A, ta kẻ các đường thẳng song song với BQ, cắt đường thẳng AP tại E và cắt đường thẳng CR tại D.



$$\Delta\ EPC \backsim \Delta\ OPB \Rightarrow \frac{PB}{PC}=\frac{OB}{EC} \qquad (a)$$

$$\Delta\ RAD \backsim \Delta\ RBO \Rightarrow \frac{RA}{RB}=\frac{AD}{OB} \qquad (b)$$

$\frac{QC}{QA}=\frac{OE}{OA}$ (QO // AD), mà $\frac{OE}{OA}=\frac{EC}{AD}$ (Δ OEC $\backsim$ Δ OAD).

nên $$\frac{QC}{QA}=\frac{EC}{AD} \qquad (c)$$

Từ (a), (b) và (c), ta có (1), đpcm.

2. Điều kiện đủ

Ta phải chứng minh rằng:

(1) ⇒ AP, BQ, CR đồng quy.

Ta giả thiết rằng đã lấy ba điểm P, Q, R lần lượt trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC và hệ thức (1) được thỏa mãn, nghĩa là

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1 \qquad (1)$$

Gọi O là giao điểm của BQ và RC. Kẻ OA và kéo dài cắt BC ở điểm P'. Ba đoạn thẳng AP', BQ, CR đồng quy tại O, nên theo kết quả vừa chứng minh ở trên, ta có:

$$\frac{P'B}{P'C} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1 \qquad (d)$$

Từ (1) và (d) suy ra:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{P'B}{P'C}$$

Vì chỉ có duy nhất một điểm chia trong đoạn thẳng BC theo một tỉ số cho trước, nên P ≡ P' hay AP cũng đi qua O, đpcm.

CHÚ Ý: Ta có thể dùng quy tắc sau đây để viết hệ thức Ceva một cách nhanh chóng mà *tránh được nhầm lẫn.*

1. Mỗi đoạn thẳng (định ra trên mỗi cạnh của tam giác) đều được viết với *đỉnh của tam giác ở cuối.* Thí dụ: PB, PC, RA (không viết BP, AR).

2. Viết ba cạnh của tam giác ABC theo thứ tự *đi vòng quanh tam giác* (đỉnh xuất phát và chiều tùy ý chọn), thí dụ:

AB, BC, CA

hoặc CB, BA, AC.

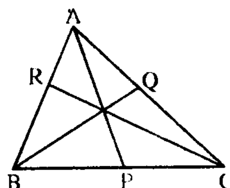
3. Viết tỉ số các đoạn thẳng định ra trên mỗi cạnh như sau:

Cạnh AB: tỉ số $\frac{RA}{RB}$ (A trên đoạn thứ nhất. B trên đoạn thứ hai).

Cạnh BC: tỉ số $\frac{PB}{PC}$, v.v...

4. Lấy tích của ba tỉ số ứng với ba cạnh theo thứ tự đã chọn ở 2).

Thí dụ 1. Trong hình bên, ta có thể:



Chọn thứ tự: BC, CA, AB

Ta có $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1.$

– Chọn thứ tự AC, CB, BA

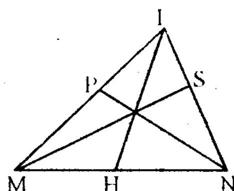
ta có $\frac{QA}{QC} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{RB}{RA} = 1.$

Đây cũng là hệ thức (1), trong đó mỗi tỉ số đều được thay bằng nghịch đảo của nó, và tích các tỉ số được viết theo thứ tự khác mà thôi.

Thí dụ 2. Trong hình bên, chọn thứ tự

IM, MN, NI

ta có $\frac{PI}{PM} \cdot \frac{HM}{HN} \cdot \frac{SN}{SI} = 1.$



Nếu chọn thứ tự khác:

NM, MI, IN

ta có hệ thức tương đương:

$$\frac{HN}{HM} \cdot \frac{PM}{PI} \cdot \frac{SI}{SN} = 1.$$

Bài 211

Hãy áp dụng định lí Ceva để chứng minh rằng trong một tam giác:

a) Ba đường trung tuyến đồng quy.

b) Ba đường phân giác đồng quy.

c) Ba đường cao đồng quy.

Bài 212

Cho một tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Một điểm E trên cạnh AB và một điểm F trên cạnh AC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để EF song song với BC là ba đoạn thẳng AM, BF, CE đồng quy.

GỢI Ý:

Áp dụng định lí Ceva và định lí Thalès đảo.

Bài 213

Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và ACFG. Chứng minh rằng BF, CD và đường cao AH của tam giác ABC đồng quy.

GỢI Ý:

Gọi B' là giao điểm của AC và BF

C' là giao điểm của AB và CD

Áp dụng điều kiện đủ của định lí Ceva đối với ba đoạn thẳng AH, BB', CC'.

Bài 214

Trên các đường thẳng qua các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, ta lấy các điểm tương ứng P, Q, R (không trùng với đỉnh nào và có ít nhất một điểm nằm ngoài tam giác). Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba điểm P, Q, R thẳng hàng là

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1 \qquad (2)$$

(Định lí Menelaus)

Menelaus (Mê-nê-la-út) nhà toán học cổ Hi Lạp (thế kỉ I)

GỢI Ý:

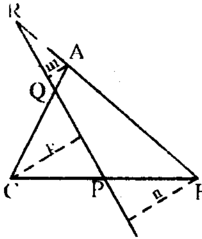
1. *Điều kiện cần:*

P, Q, R thẳng hàng ⇒ (2).

Gọi khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng PQR là m, n và p, ta có:

$\frac{PB}{PC} = \frac{n}{p}$, $\frac{QC}{QA} = \frac{p}{m}$, $\frac{RA}{RB} = \frac{m}{n}$, từ đó có (2).

2. *Điều kiện đủ:*



Nếu có (2) và ít nhất một trong ba điểm P, Q, R nằm ngoài tam giác ABC thì P, Q, R thẳng hàng.

Chứng minh bằng phản chứng, tương tự chứng minh điều kiện đủ trong định lí Ceva.

Qui tắc để viết hệ thức (2) đối với định lí Menelaus cũng giống qui tắc viết hệ thức (1) đối với định lí Ceva.

Bài 215

Cho tam giác MNP; một đường thẳng cắt các cạnh MP và PN lần lượt tại R và S, và cắt cạnh MN kéo dài tại T. Đường thẳng qua P và giao điểm I của MS và RN cắt cạnh MN tại U. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, T, U lập thành một hàng điểm điều hòa.

GỢI Ý:

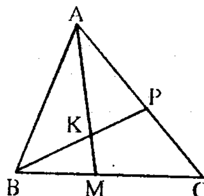
Dùng định lí Menelaus và định lí Ceva (điều kiện cần), suy ra $\frac{UM}{UN} = \frac{TM}{TN}$

Bài 216

Trên đường trung tuyến AM của tam giác ABC, ta lấy một điểm K sao cho AK = 3 KM. Đường thẳng BK cắt cạnh AC tại P. Tính tỉ số PA : PC.

GỢI Ý:

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác ACM và cát tuyến BKP.



Đáp số: $\frac{PA}{PC} = \frac{3}{2}$.

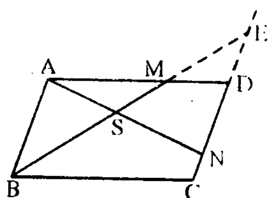
Bài 217

Cho hình bình hành ABCD. Ta lấy điểm M trên cạnh AD sao cho AM = 2MD, và điểm N trên cạnh AD sao cho DN = 3NC. Hai đường thẳng BM và AN cắt nhau tại S. Tính tỉ số AS : SN.

GỢI Ý:

Kéo dài BM và CD cắt nhau tại E.

$$DE = \frac{CD}{2}$$



Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác MDE và cát tuyến ASN, từ đó có tỉ số SM : SE, suy ra tỉ số MS : ME.

Áp dụng tiếp định lí Menelaus vào tam giác SNE và cát tuyến AMD, từ đó có tỉ số AS : AN, suy ra tỉ số AS. SN

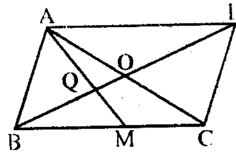
Bài 218

Cho hình bình hành ABCD có diện tích 1. Đường thẳng qua đỉnh A và trung điểm M của cạnh BC cắt đường chéo BD ở Q. Tính diện tích của tứ giác CDQM.

GỢI Ý:

$S_{CDQM} = S_{CDB} - S_{BQM}$

$S_{BQM} + S_{ABQ} = S_{ABM}$



Mà $S_{CDB} = 2S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}$

Do đó, chỉ cần xác định tỉ số QA : QM.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác BCO và cát tuyến AQM để xác định QB : QO. Áp dụng định lí Ménelaus vào tam giác BQM và cát tuyến AOC để xác định AQ : AM.

Bài 219

Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC ta lấy các điểm tương ứng M, N, P sao cho:

$$MA : MB = NB : NC = PC : PA = 1 : 4.$$

Các đường thẳng AN, BP và CM cắt nhau tạo thành tam giác EGH. Tính diện tích tam giác EGH, biết diện tích tam giác ABC bằng 1.

GỢI Ý:

$S_{EGH} = S_{ABC} - S_{ABN} - S_{BCP} - S_{CAM} + S_{BEN} + S_{CGP} + S_{AHM}$

$S_{ABN} = S_{BPC} = S_{CAM} = S_{ABC}/5.$

Để tính S_{BEN}, tính tỉ số EN : EA.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác ANC và cát tuyến BEP, có:

$$\frac{EN}{EA} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{BC}{BN} = 1 \Rightarrow \frac{EN}{EA} = \frac{1}{20}$$

Bài 220

Cho hình thang ABCD (AB // CD). Trên các cạnh bên AD, BC cho các điểm M, N sao cho

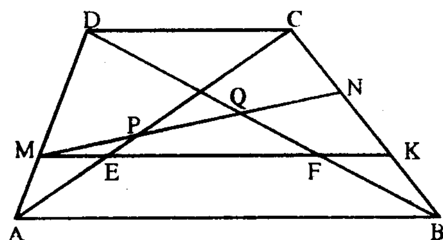
$$\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$$

Đường thẳng MN cắt đường chéo AC tại điểm P và cắt đường chéo BD tại điểm Q.

Chứng minh MP = NQ.

GIẢI (vắn tắt)

Qua M kẻ đường thẳng song song với đáy AB, cắt BC ở K, BD ở F và AC ở E. Ta có



$$\frac{KB}{CK} = \frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$$

Đặt KN = a. Dễ thấy KE = FM, đặt KE = c

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác MNK với cát tuyến AC và sau đó vào tam giác MNK với cát tuyến BD, ta có

$$\frac{NP}{PM} \cdot \frac{c - EF}{c} \cdot \frac{b}{b - a} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{NQ}{QM} \cdot \frac{c}{c - EF} \cdot \frac{b - a}{b} = 1 \qquad (2)$$

Nhân (1) và (2) vế với vế, ta được:

$$\frac{NQ}{QM} = \frac{PM}{NP} \Rightarrow PM = NQ.$$

§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác vuông ABC:

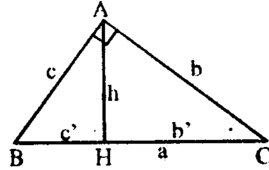
$\widehat{A} = 90^\circ$,

BC = a, AB = c,

AC = b;

AH = h, BH = c',

CH = b'



Định lí 1

$$\Delta\ ABC \text{ vuông} \Rightarrow c^2 = ac';\ b^2 = ab'$$

Định lí 2 (định lí Pythagore)

$$\Delta\ ABC \text{ vuông} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Định lí 3 (định lí đảo của định lí Pythagore)

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta\ ABC \text{ vuông}$$

Tóm tắt định lí 2 và 3:

$$\Delta\ ABC \text{ vuông} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Định lí 4

$$\Delta\ ABC \text{ vuông} \Rightarrow bc = ah$$

Định lí 5

$$\Delta\ ABC \text{ vuông} \Rightarrow h^2 = b'.c'$$

Định lí 6

$$\Delta\ ABC \text{ vuông} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

CHÚ Ý:

1. Định lí 3 (định lí Pythagore đảo) cho ta một cách để chứng minh một tam giác là vuông, cũng là cách để chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

2. Ta dễ dàng chứng minh được định lí đảo của định lí 5, nghĩa là

$$h^2 = b'c' \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông}$$

và điều này cũng thường được sử dụng để chứng minh một tam giác là vuông.

3. Định lí 6 giúp ta tính được đường cao thuộc cạnh huyền khi đã biết hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông.

Bài 221

Phát biểu mệnh đề đảo của định lí 1. Mệnh đề này có đúng không? Chứng minh. Từ đó nêu lên một dấu hiệu nhận biết tam giác vuông?

GỢI Ý:

Mệnh đề đảo của định lí 1: "Nếu trong một tam giác, bình phương của một cạnh (cạnh thứ nhất) bằng tích của một cạnh thứ hai với hình chiếu của cạnh thứ nhất trên nó thì tam giác ấy là một tam giác vuông".

Sử dụng tam giác đồng dạng để chứng minh.

Bài 222

Cho trước hai đoạn thẳng m, n. Dựng đoạn thẳng x thỏa mãn hệ thức

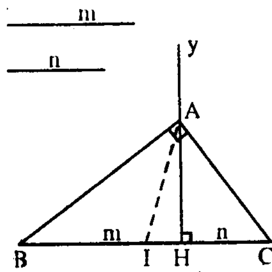
$$x^2 = m.n$$

(x gọi là đoạn trung bình nhân của hai đoạn thẳng m, n).

GỢI Ý:

Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

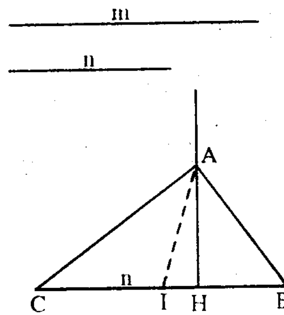
Cách 1:



Trên một đường thẳng đặt liên tiếp hai đoạn thẳng BH = m và HC = n. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng đường thẳng vuông góc với BC tại H và dựng một cung tròn tâm I, bán kính $\frac{BC}{2}$, cắt đường thẳng Hy ở A. Δ ABC vuông vì có trung tuyến AI bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền BC. Vậy AH^2 = BH.HC hay x^2 = m.n, với AH = x.

Cách 2:

Trên một đường thẳng ta đặt một đoạn BC = m. Lấy một điểm H thuộc BC sao cho CH = n. Dựng đường Hy vuông góc với BC. Gọi I là trung điểm của BC. Lấy I làm tâm quay cung tròn bán kính $\frac{BC}{2}$, cắt Hy ở A, Δ ABC vuông vì trung tuyến AI = $\frac{1}{2}$BC.



Ta có AC = x vì AC^2 = BC.CH = m.n

Bài 223

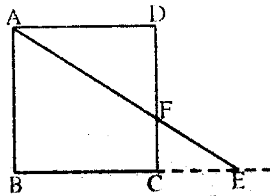
Cho một hình vuông ABCD. Qua đỉnh A ta kẻ một cát tuyến bất kì, cắt các cạnh BC và CD (hoặc phần kéo dài của chúng) tại các điểm E, F. Chứng minh hệ thức:

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$$

GỢI Ý:

Hãy nhớ đến công thức

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$



để tìm cách có được một tam giác vuông trong đó AB là đường cao, AF', AE là các cạnh góc vuông.

(với AF' = AF).

Bài 224

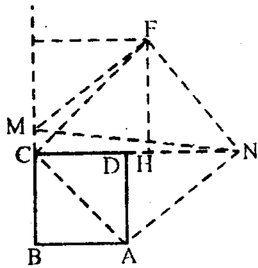
Cho tam giác ABC, đỉnh là A. Từ B và C ta kẻ đường cao BD và CH. Chứng minh hệ thức:

$$3BD^2 + 2AD^2 + CH^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2.$$

Bài 225

Cho hình vuông ABCD. Trên tia BC ta lấy một điểm M (M nằm ngoài đoạn BC) và trên tia CD lấy một điểm N (N nằm ngoài đoạn CD) sao cho ta có DN = BM. Đường vuông góc với MA tại M và đường vuông góc với NA tại N cắt nhau ở F. Chứng minh CF vuông góc với CA.

GỢI Ý:



Cách 1:

Xem bài 130

Cách 2:

Chứng minh MA = NA và $MN^2 = MA^2 + NA^2$ để suy ra AMFN là hình vuông, sau đó chứng minh F nằm trên phân giác góc $\widehat{NCM}$.

Bài 226

Cho hai tam giác vuông ABC (vuông tại A) và A'B'C' (vuông tại A') đồng dạng với nhau. Giả sử:

BC = a AB = c AC = b

B'C' = a' A'B' = c' A'C' = b'

Chứng minh hệ thức:

$$aa' = bb' + cc'$$

Phát biểu thành một tính chất của hai tam giác vuông đồng dạng.

Bài 227

Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB). Từ trung diểm I của cạnh AC ta kẻ đường ID vuông góc với cạnh huyền BC.

Chứng minh hệ thức:

$$BD^2 - CD^2 = AB^2$$

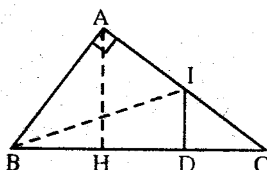
GỢI Ý:

Cách 1:

Xuất phát từ hệ thức BD = BC – CD

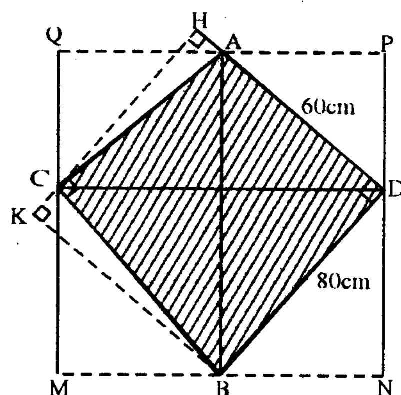
Cách 2:

Xuất phát từ kết luận $BD^2 - CD^2 = AB^2$ với chú ý HD = DC.



CHÚ Ý: Các bạn suy nghĩ xem ta sử dụng giả thiết AC > AB ở chỗ nào? Nếu không có giả thiết này thì sao?

Làm diều giấy



Một người dự định làm một con diều bằng giấy, hình dáng và kích thước như hình vẽ bên.

1. Hãy tính kích thước của các thanh tre AB, CD (dùng để làm "xương" của diều)

2. Diều có thể cắt ra từ hình chữ nhật MNPQ hoặc hình chữ nhật BDHK. Nên cắt kiểu nào thì tiết kiệm giấy hơn? Vì sao?

• PYTHAGORE VÀ ĐỊNH LÍ PYTHAGORE

Những thông tin về cuộc đời và sự nghiệp Khoa học của Pythagore hiện nay còn lại rất ít.



Người ta chỉ biết rằng ông sinh vào khoảng năm 580 trước Công nguyên tại Samos, một hòn đảo buôn bán giàu có ở Hi Lạp. Thời trai trẻ, ông đã từng đi du lịch nhiều nơi, đã đến Ai Cập, Babilon, thậm chí còn sang tận Ấn Độ tiếp xúc với nền văn hóa Hindu cổ đại.

Khoảng năm 532 trước Công nguyên, ông trở về Crotone mở trường dạy học và lập nên trường phái Pythagore nổi tiếng trong lịch sử. Có thể coi trường phái

Pythagore là một "Viện Hàn lâm" thời cổ đại, ở đó ông và các học trò của ông nghiên cứu Triết học, Khoa học tự nhiên, Âm nhạc, Toán học và cả làm các nghi lễ tôn giáo. Về toán học, Pythagore và các học trò của ông đặc biệt quan tâm đến hình học và số học. Người ta kể rằng trước phòng học, ông cho treo biển: "Ai không biết Hình học thì không được vào đây" và trước khi học, mọi người đều phải đọc câu: "Hãy ban ơn cho tôi, hỡi các con số thần linh đã sáng tạo ra Vũ trụ".

Các kết quả nghiên cứu của ông và các học trò rất to lớn và độc đáo nhưng do quy định của ông là chỉ được truyền khẩu trong nội bộ và nếu có viết ra thì khi chết phải đem đốt đi, cho nên rất nhiều công trình bị thất lạc, không còn lại đến ngày nay.

Định lí Pythagore, như nhà thiên văn học và toán học nổi tiếng người Đức là J.Képler đã đánh giá là một trong hai báu vật của hình học, không những quan trọng đối với toán học mà còn có ý nghĩa đối với các môn khoa học khác, đối với đời sống hàng ngày. Mặt khác, những bài toán xung quanh định lí Pythagore, như việc tìm bộ ba số Pythagore, *tức là tìm ba số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$, là một lĩnh vực hấp dẫn đối với nhiều nhà toán học và cũng đã đóng góp to lớn cho sự phát triển của số học nói riêng và của toán học nói chung.*

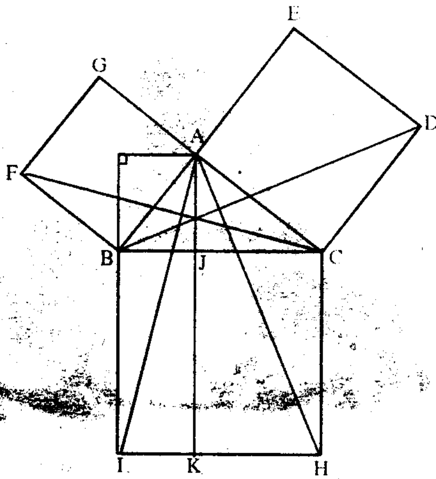


CÁC CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ PYTHAGORE

Từ thời cổ đại, người Trung Quốc, người Ai Cập, người Hi Lạp, người Ấn Độ đã từng sử dụng và chứng minh định lí Pythagore. Các chứng minh của họ, phần lớn dựa vào cách cắt và ghép hình. Cho đến nay đã có hàng trăm cách chứng minh định lí này. Nhà toán học Hoa Kì Elisha Scott đã tập hợp được tất cả 367 cách chứng minh khác nhau của định lí Pythagore. Điều thú vị là việc tìm tòi chứng minh định lí này không những thu hút sự quan tâm của các nhà toán học mà còn là nguồn cảm hứng của rất nhiều người yêu thích môn toán, từ những người nổi tiếng như họa sĩ thiên tài Leonardo da Vinci, đến cả những người lao động bình thường, như nhà buôn H.Perigal.

Sau đây là một vài chứng minh.

1. Chứng minh của Euclide



Trong quyển "Nguyên lí" nổi tiếng của ông, Euclide đã nêu ra và chứng minh bài toán sau:

"Giả sử tam giác vuông ABC, có góc $\hat{A}$ vuông, tôi khẳng định diện tích hình vuông dựng trên cạnh BC bằng tổng diện tích hai hình vuông dựng trên các cạnh AB và AC".

Thật vậy, kẻ AK // BI

Dễ thấy:

$\Delta\ ABI = \Delta\ FBC$

$$\Rightarrow S_{ABI} = S_{FBC} \qquad (1)$$

Do AK // BI nên tam giác ABI và hình chữ nhật BJKI có cùng đường cao và có đáy BI chung nên

$$S_{ABI} = \frac{1}{2} S_{BJKI} \qquad (2)$$

Ta có ba điểm C, A, G thẳng hàng cho ta CG // BF. Tam giác FBC và hình vuông ABGF có cùng đáy BF và đường cao bằng nhau nên

$$S_{FBC} = \frac{1}{2} S_{ABFG} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$S_{ABFG} = S_{BJKI} \qquad (4)$$

Chứng minh tương tự, ta có

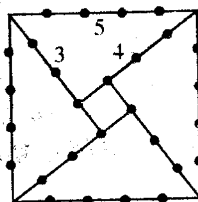
$$S_{ACDE} = S_{JKHC} \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) cho ta

$$S_{ABFG} + S_{ACDE} = S_{BCHI} \text{ (đpcm).}$$

Cách chứng minh này đã được Euclide đưa ra cách đây trên 2000 năm.

2. Chứng minh của người Trung Quốc

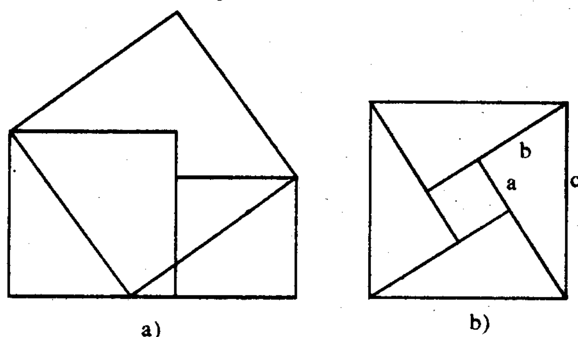


"Chu bễ toán kinh" là quyển sách toán cổ đại của Trung Quốc, có thể đã xuất hiện vào thế kỉ thứ 12 trước Công nguyên, dưới dạng đối thoại giữa hai nhân vật là Chu Công và Thương Cao. Trong sách đã trình bày các vấn đề về thiên

văn, các tính chất của phân số và các kiến thức về tam giác vuông. Hình vẽ trên đây minh họa cho định lí Pythagore và cách chứng minh định lí.

3. Chứng minh của người Ấn Độ

Điều đặc biệt trong các chứng minh của các nhà toán học Ấn Độ là không viết thành lời mà chỉ vẽ hình và ghi bên cạnh hai chữ: "Xem đây".



a) b)

Hình a) là chứng minh của nhà triết học, nhà vật lí học, nhà toán học Ấn Độ Tabit - ibn - Qorra (826 - 901).

Hình b) là chứng minh của Bhãskara.

Dễ thấy ta có bốn tam giác vuông, mỗi hình có diện tích là $\frac{1}{2}ab$

Diện tích hình vuông nhỏ là $(a - b)^2$

Diện tích hình vuông lớn là c^2

Rõ ràng

$$c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (a-b)^2 = a^2 + b^2.$$

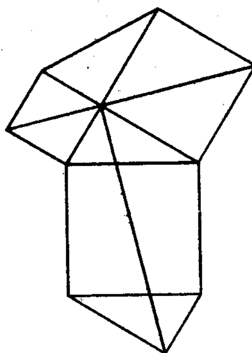
***Bhãskara** là nhà toán học Ấn Độ, sống vào khoảng 1114 – 1185. Một trong những tác phẩm chủ yếu của ông là*

quyển Lilāvati, trong đó trình bày những kiến thức toán học chủ yếu của người Ấn Độ. Điều độc đáo là tên quyển sách toán này – Lilāvati, tiếng Hindu nghĩa là "Cái đẹp" – lại là tên của một thiếu nữ. Chuyện kể rằng Lilāvati là cô con gái duy nhất và xinh đẹp của Bhāskara. Nàng được các vì tinh tú báo trước là sẽ gặp điều bất hạnh nếu không làm lễ cưới vào một giờ đã định. Tới ngày ấy, Lilāvati trang điểm lộng lẫy, lo lắng và hồi hộp ngồi đếm từng giọt nước nhỏ xuống trong chiếc đồng hồ để trước mặt.

Sắp đến giờ tốt lành đã định, bỗng một cơn gió mạnh thổi qua làm cho viên ngọc bích đính trên chiếc khăn đội đầu của nàng rơi ra, chui vào đồng hồ và bịt mất lỗ nước xuống... Thế là giây phút may mắn đã trôi qua một cách nghiệt ngã...

Để an ủi người con gái bất hạnh Bhāskara đã lấy tên con đặt cho một tác phẩm nổi tiếng của mình!

4. Chứng minh của Leonardo da Vinci

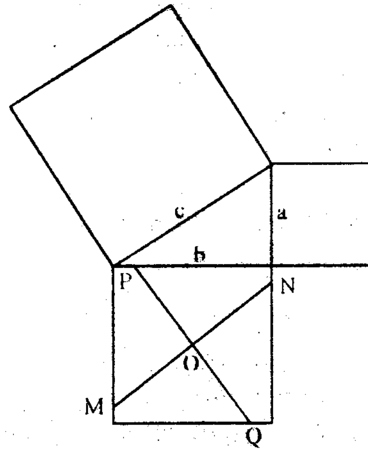


Leonardo da Vinci *(1452 – 1519) là một nhà bác học Ý, một họa sĩ thiên tài, tác giả của bức danh họa* La Joconde. *Ông đã chứng minh định lí Pythagore bằng cách cắt ghép hình như hình bên.*

5. Chứng minh của H. Perigal

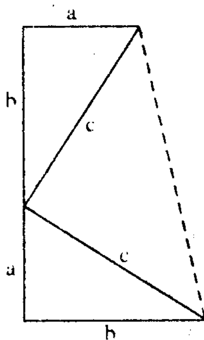
H. Perigal là một nhà buôn và thiên văn nghiệp dư ở Luân Đôn (nước Anh). Năm 1830, ông đã tìm ra một cách chứng minh định lí Pythagore dựa trên một cách cắt ghép hình độc

đáo: cắt hình vuông cạnh b theo đường MN (qua tâm O của hình vuông và song song với cạnh c) và đường PQ ⊥ MN; ghép bốn mảnh có được vào hình vuông cạnh a, được hình vuông cạnh c. Hứng thú với điều tìm tòi đó, Perigal đã cho in hình vẽ trên đây lên danh thiếp của mình!



6. Chứng minh của J. Garfield

J.Garfield (1831 - 1881) là tổng thống thứ 20 của Hoa Kì. Trước khi được bầu tổng thống, ông đã tìm ra một cách chứng minh định lí Pythagore bằng cách vẽ một hình thang vuông như hình bên, rồi tính diện tích hình thang theo hai cách:

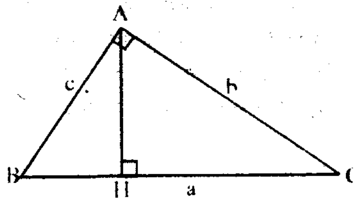


$$(a+b)\cdot\frac{a+b}{2} \quad \text{và} \quad ab+\frac{c^2}{2}.$$

7. Một chứng minh đơn giản mà sâu sắc

Vẽ đường cao AH của tam giác vuông ABC. Ba tam giác ABC, HCA và HBA đồng dạng, nên các diện tích S_1, S_2, S_3 của chúng tỉ lệ với bình phương các cạnh tương ứng:

$S_1 = ka^2$, $S_2 = kb^2$,
$S_3 = kc^2$



Mà $S_1 = S_2 + S_3$*, do đó* $ka^2 = kb^2 + kc^2$,

suy ra $a^2 = b^2 + c^2$ *(đpcm).*

Chứng minh trên đây ẩn dấu những ý tưởng sâu sắc *(đã có từ Euclide!): trước hết, chú ý rằng các hình vuông là các hình đồng dạng với nhau, ta nghĩ đến việc* mở rộng *định lí Pythagore:*

"Nếu trên ba cạnh của một tam giác vuông ta dựng những **đa giác đồng dạng** *với nhau thì diện tích đa giác dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích các đa giác dựng trên hai cạnh góc vuông".*

Ta lại xét một trường hợp đặc biệt thật đơn giản: *kẻ đường cao AH của tam giác vuông ABC, ta có* ba tam giác đồng dạng dựng trên ba cạnh *là ABC (dựng trên BC), HCA (dựng trên CA) và HBA (dựng trên BA) với*

$$S_{ABC} = S_{HCA} + S_{HBA}$$

và từ đây suy ra được định lí Pythagore như đã chứng minh ở trên.

PAPPUS MỞ RỘNG ĐỊNH LÍ PYTHAGORE

Pappus, nhà toán học Hi Lạp, sống vào khoảng năm 300 (sau Công nguyên) người đã bình giải quyển "Nguyên lí" của Euclide, đã đưa ra bài toán sau:

Bài 228

Cho tam giác ABC là một tam giác bất kì. Dựng trên cạnh AB và AC các hình bình hành bất kì ABDE; ACFG. Gọi H là giao điểm của DE và FG. Dựng trên cạnh BC hình bình hành BCML với CM và BL song song và bằng HA. Chứng minh:

$$S_{BCML} = S_{ABDE} + S_{ACFG}$$

Hướng dẫn:

Gọi P là giao điểm của LB với DH và Q là giao điểm của MC với FH.

Hai hình bình hành ABDE và ABPH có cạnh đáy bằng nhau và chiều cao bằng nhau nên:

$$S_{ABDE} = S_{ABPH}$$

Hai hình bình hành ABPH và BLJI cũng có cạnh đáy bằng nhau và chiều cao bằng nhau, cho ta

$$S_{ABPH} = S_{BLJI}$$

Tương tự, ta có

$$S_{ACFG} = S_{CMJI}$$

$$\Rightarrow S_{ABPH} + S_{ACFG} = S_{BLJI} + S_{CMJI}$$

$$\Rightarrow S_{ABPH} + S_{ACFG} = S_{BCML}$$

NHẬN XÉT: Bây giờ ta thử xét một trường hợp đặc biệt khi ABC là tam giác vuông đỉnh A và ABDE, ACFG, BCML là các hình vuông dựng trên ba cạnh AB, AC, BC.

Ta chỉ cần chỉ ra rằng với các giả thiết này thì bài toán thỏa mãn các điều kiện của định lí Pappus. Thật vậy dễ thấy hai tam giác vuông AEH và BAC bằng nhau, cho ta

HA = BC hay BL = HA

Ta cũng có $\widehat{B} = \widehat{A}_1$

mà $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90°$

Suy ra $\widehat{A}_2 + \widehat{B} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90°$

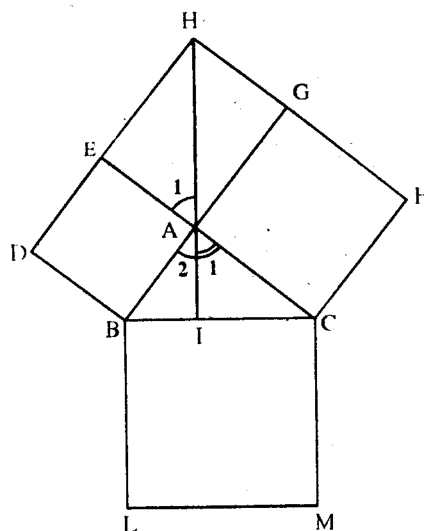
hay $HI \perp BC$

cho ta BL // HA.

Áp dụng định lí Pappus, ta có

$$S_{BCML} = S_{ABDE} + S_{ACFG}$$

Như vậy, định lí Pappus là sự mở rộng của định lí Pythagore.



Bài 229

Định lí Tabit Ibn Qorra

Trong tam giác ABC, nếu lấy trên cạnh BC hai điểm B', C' sao cho

$$\widehat{AB'B} = \widehat{AC'C} = \widehat{A}$$

thì ta có hệ thức

$$AB^2 + AC^2 = BC(BB' + CC').$$

GỢI Ý:

Sử dụng các kiến thức về tam giác đồng dạng.

CHÚ Ý: Các bạn hãy thử lại để thấy rằng khi $\widehat{A} = 90°$ thì ta được định lí Pythagore.

Định lí Tabit - Ibn Qorra tổng quát hơn định lí Pythagore!

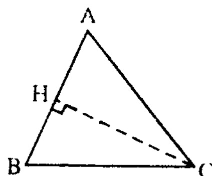
• HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC BẤT KÌ

1. Bình phương của một cạnh đối diện với góc nhọn

Định lí 1: *Trong một tam giác bất kì, bình phương của một cạnh đối diện với một góc nhọn bằng tổng bình phương của hai cạnh kia trừ đi hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh còn lại trên nó.*

Chứng minh

Giả sử $\widehat{A}$ là góc nhọn.



Gọi AH là hình chiếu của cạnh AC trên cạnh AB.

Ta phải chứng minh hệ thức:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AH \quad (1)$$

Trong tam giác vuông BHC ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \quad (a)$$

Trong tam giác vuông AHC ta có

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 \quad (b)$$

Vì góc $\widehat{A}$ nhọn, nên H và B nằm cùng phía đối với điểm A nên ta luôn luôn có

$$BH = |AB - AH| \Rightarrow BH^2 = AB^2 + AH^2 - 2AB.AH \quad (c)$$

Thay (b) và (c) vào (a) ta có (1).

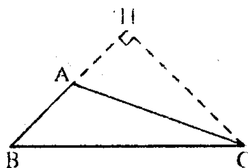
2. Bình phương một cạnh đối diện với góc tù

Định lí 2: *Trong một tam giác có góc tù, bình phương của cạnh đối diện với góc tù bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia cộng với hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh còn lại trên nó.*

GỢI Ý CHỨNG MINH:

Tương tự với chứng minh định lí 1.

Lưu ý vì $\widehat{A}$ là góc tù nên H và B ở về hai phía đối với A và ta có BH = AH + AB



Kết quả

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB.AH \qquad (2)$$

3. Chú ý

a) Ta có thể chứng minh các mệnh đề đảo, nghĩa là nếu hệ thức (1) được thỏa thì $\widehat{A}$ là góc nhọn, nếu (2) được thỏa thì $\widehat{A}$ là góc tù.

b) Tóm lại ta có kết luận:

$$\widehat{A} < 90^o \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AH$$

$$\widehat{A} = 90^o \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\widehat{A} > 90^o \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB.AH$$

Bài 230

Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh BC, H là chân đường cao AH.

Chứng minh các hệ thức:

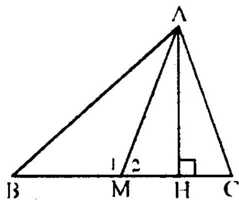
$$AB^2 + AC^2 = 2.AM^2 + \frac{BC^2}{2} \qquad (3)$$

$$|AB^2 - AC^2| = 2.BC.MH \qquad (4)$$

GIẢI

Giả sử AB > AC, ta có ngay

$\widehat{M}_1 > 90^0$, $\widehat{M}_2 < 90^0$



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vào các tam giác AMB, AMC, ta có:

$\widehat{M}_1 > 90^0 \Rightarrow AB^2 = AM^2 + BM^2 +$
$+ 2.BM.MH$ (1)

$\widehat{M}_2 < 90^0 \Rightarrow AC^2 = AM^2 + CM^2 -$
$- 2.CM.MH$ (2)

Cộng (1) và (2) vế với vế và chú ý rằng:

$$BM = CM = \frac{BC}{2}.$$

ta suy ra $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

Trừ (1) và (2) vế với vế và với chú ý trên, ta có:

$$AB^2 - AC^2 = 2BC.MH$$

CHÚ Ý:

Từ hệ thức $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ ta suy ra được một công thức để tính đường trung tuyến của một tam giác theo ba cạnh:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$$

Bài 231

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác và m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài của các trung tuyến tương ứng với các cạnh ấy.

Chứng minh hệ thức:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 232

Cho tứ giác ABCD. Gọi I và J là các trung điểm của các đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh hệ thức:

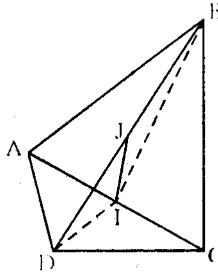
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2.$$

b) Từ kết quả trên, chứng minh định lí:

"Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là một hình bình hành là tổng các bình phương của các cạnh bên bằng tổng các bình phương của các đường chéo".

GỢI Ý:

a) Áp dụng hệ thức (3) vào các tam giác ABC và ADC, trong đó BI, DI là các trung tuyến. Sau đó tiếp tục áp dụng vào tam giác BID, trong đó IJ là trung tuyến.



b) Chú ý rằng ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $I \equiv J$, tức là $IJ = 0$.

Khai thác bài toán: Nếu tứ giác ABCD là hình thang (AB// CD) thì hệ thức trên sẽ có dạng như thế nào?

GỢI Ý: Chứng minh hệ thức

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD$$

Bài 233

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau là hệ thức sau đây được thỏa:

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Bài 234

Cho tam giác ABC có AB = 3cm, AC = 4cm và góc A có số đo thay đổi. Hãy tìm tất cả các tam giác ABC như vậy sao cho cạnh BC có số đo là một số tự nhiên. Hãy xác định các giá trị của BC để ta có các trường hợp:

$$\widehat{A} = 90^\circ; \quad \widehat{A} < 90^\circ; \quad \widehat{A} > 90^\circ.$$

GỢI Ý:

Ta cần có điều kiện AB + AC > BC > AC − AB

hay $7 > BC > 1$

Vậy có 5 tam giác thỏa mãn điều kiện, ứng với BC nhận các giá trị 2, 3, 4, 5, 6 (cm)

Với BC = 5 (cm) thì ta có:

$$BC^2 = 25; \ AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Vậy $BC^2 = AB^2 + AC^2$ cho ta $\widehat{A} = 90^\circ$

$\widehat{A} < 90^\circ \Rightarrow BC < 5$. Vậy BC phải lấy các giá trị 2 hoặc 3, hoặc 4 (cm)

$\widehat{A} > 90^\circ \Rightarrow BC > 5$ hay BC = 6 (cm).

Bài 235

Cho hình bình hành ABCD và M là một điểm bất kì.

Chứng minh rằng:

$$(MA^2 + MC^2) - (MB^2 + MD^2) = k.$$

trong đó k là một số không đổi.

Trong trường hợp nào thì k = 0?

GỢI Ý:

– Áp dụng công thức (3) trên đây.

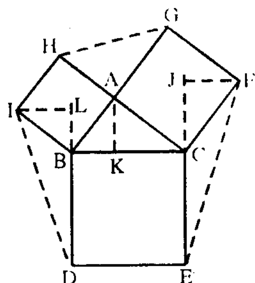
– Khi ABCD là hình chữ nhật.

Bài 236

Cho một tam giác ABC vuông tại A. Ta dựng trên mỗi cạnh và về phía ngoài của tam giác các hình vuông ABIH, ACFG, BCED.

a) Chứng minh rằng các tam giác ABC, AGH, BID, CFE có diện tích bằng nhau.

b) Chứng minh rằng tổng bình phương các cạnh của hình lục giác DEFGHI bằng 8 lần bình phương cạnh huyền của tam giác ABC.



GỢI Ý:

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHG; hệ thức lượng trong các tam giác IBF, ECF (chú ý độ lớn các góc IBF, ECF)

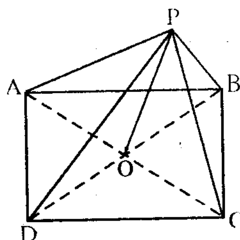
Hệ thức phải chứng minh là:

$$DE^2 + EF^2 + FG^2 + GH^2 + HI^2 + ID^2 = 8BC^2.$$

Bài 237

a) Chứng minh rằng tổng các bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trong mặt phẳng đến hai đỉnh đối diện của hình chữ nhật là bằng nhau.

b) Trên các cạnh của tam giác ABC, người ta dựng các hình chữ nhật ABB_1A_1, BCC_1B_2, CAA_2C_2 (về phía ngoài tam giác). Chứng minh rằng các đường trung trực của các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

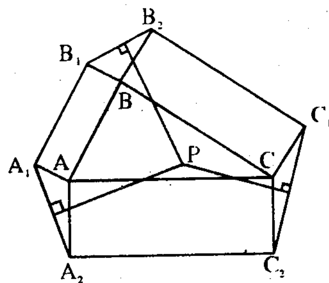


GỢI Ý:

a) Áp dụng hệ thức (3) vào các tam giác PDB, PAC để chứng minh

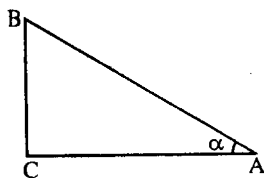
$PA^2 + PC^2 = PD^2 + PB^2$

b) Hãy nghĩ đến việc áp dụng kết quả của câu trên. Gọi P là giao điểm của hai đường trung trực của A_1A_2 và B_1B_2. Chứng minh P cũng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng C_1C_2.



§4. TỶ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1. Định nghĩa



$\widehat{BAC} = \alpha$, $0^o < \alpha < 90^o$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} \; ; \; cotg\alpha = \frac{AC}{BC}$$

Rõ ràng $\cos\alpha < 1$, $\sin\alpha < 1$.

2. Tính chất

Tính chất tăng giảm

$$\alpha_2 > \alpha_1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha_2 < \cos\alpha_1 \; ; \\ \sin\alpha_2 > \sin\alpha_1 \; ; \\ tg\alpha_2 > tg\alpha_1 \; ; \end{cases}$$

Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

$$\alpha + \beta = 90^o \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \sin\beta = \cos\alpha \end{cases}$$

3. Một vài hệ thức cơ bản

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$

Bài 238

Chứng minh các hệ thức

a) $\text{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

b) $\text{cotg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

GỢI Ý:

Sử dụng các hệ thức cơ bản.

Bài 239

Cho biết $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$

Tính $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$

Bài 240

Chứng minh hệ thức:

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta - \sin^2\alpha = \frac{1}{\text{tg}^2\alpha + 1} - \frac{1}{\text{tg}^2\beta + 1}$$

Bài 241

Đơn giản biểu thức

$$A = \frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

Bài 242

Cho tam giác ABC, vuông ở A; đường cao AH. Sử dụng định nghĩa tỉ số lượng giác để thử lại các hệ thức

$$AB^2 = BH.\ BC \quad ; \quad AH^2 = BH.CH$$

Bài 243

Chứng minh các hệ thức:

1. $tg^2\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\alpha\ .\ \sin^2\alpha$

2. $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$

3. $\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha = (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)$

Bài 244

Chứng minh các hệ thức sau đây không phụ thuộc vào α

1. $A = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha)$

2. $B = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

GỢI Ý:

Đặt $\sin^2\alpha = u$, $\cos^2\alpha = v$

Sử dụng các hệ thức cơ bản và các hằng đẳng thức, kết quả

$$A = 1$$

$$B = 1$$

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

1. Tính tỉ số lượng giác

Ví dụ 1: Tìm sin $40^o.12'$

Trước hết ta đổi 12' theo hệ thập phân:

$$12' = \left(\frac{2}{10}\right)^o$$

tức là $\sin 40^o\ 12' = \sin 40^o \left(\frac{2}{10}\right)^o$

$= \sin (40,2)^o$.

Ta thực hiện các bước sau:

– Truy xuất số 40,2 lên màn hình.

– Ấn nút [Sin], ta đọc trên màn hình số 0,64547687

– Làm tròn số, chỉ giữ lại bốn chữ số có nghĩa.

Kết quả $\sin 40^o.12' \approx 0,6455$.

Ví dụ 2: Tìm tg $25^o.12'$

Ta có $tg25^o.12' = tg\ (25,2)^o$

– Truy xuất số 25,2 lên màn hình.

– Ấn nút [Tan] . Màn hình xuất hiện số 0,470564281. Làm tròn số ta được kết quả:

$$tg25^o.12' \approx 0,4706.$$

2. Tìm số đo góc khi biết tỉ số lượng giác

Ví dụ: Tìm góc x, biết cosx = 0,1828.

Ta thực hiện các bước:

- Truy xuất số 0,1828 lên màn hình

- Ấn nút [2ndF]

- Ấn nút [Cos]

Trên màn hình xuất hiện số 79.46710545

- Làm tròn số: 79.46.

- Đổi sang hệ 60: $0.46 = \frac{46.60}{100} = 28$

Kết quả $x \approx 79^{0}.28'$.

Bài 245

Trong các bài tập sau đây, các bạn hãy dựa vào tính chất của các tỉ số lượng giác để giải, sau đó sử dụng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để kiểm tra lại kết luận.

1. So sánh các tỉ số lượng giác:

a) $\sin 20^{o}$ và $\sin 70^{o}$;

b) $\cos 80^{o}$ và $\cos 10^{o}$;

c) tg20^{o} và tg50^{o} ;

d) $\sin 36^{o}$ và $\cos 36^{o}$;

e) tg45^{o} và $\cos 45^{o}$.

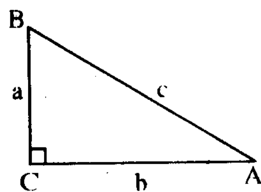
2. Sắp xếp các số sau đây theo thứ tự giảm:

a) $\sin 21^{o}$; $\cos 42^{o}$; $\cos 72^{o}$; $\sin 29^{o}$; $\cos 13^{o}$.

b) $\sin 50^{o}$; $\cos 50^{o}$; tg50^{o}.

HỆ THỨC GIỮA CÁC CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Định lí:



Δ ABC vuông tại đỉnh C:

b = c.cosA ; a = c.cosB

b = c.sinB ; a = c.sinA

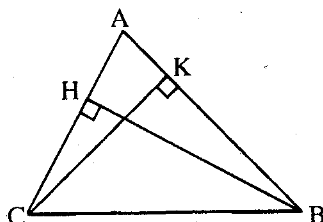
b = a tgB ; a = b.tgA.

Bài 246

Cho tam giác ABC với hai đường cao BH và CK. Chứng minh rằng

AB > AC ⇒ BH > CK

GIẢI



Trong tam giác vuông AHB ta có BH = AB . sinA

Trong tam giác vuông AKC ta có CK = AC . sinA

vì AB > AC và sin A > 0 nên

$$\frac{BH}{CK} = \frac{AB \sin A}{AC \sin A} > 1 \Rightarrow BH > CK.$$

Bài 247

1. Chứng minh định lí:

"Diện tích một tam giác bằng một nửa tích của hai cạnh kề một góc nhọn nhân với sin của góc ấy".

2. Áp dụng:

Tính diện tích của tứ giác lồi ABCD, có đường chéo AC = m, BD = n và góc giữa hai đường chéo là α ; $\alpha < 90^\circ$.

GỢI Ý:

1. Tam giác ABC với $\widehat{A} < 90^\circ$. Cần chứng minh

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A$$

2. Đáp số:

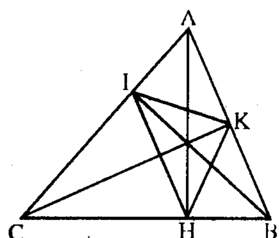
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} m \cdot n \sin\alpha.$$

Bài 248

Ba góc của một tam giác ABC đều nhọn và có độ lớn bằng α, β, γ ; các đường cao AH, BI, CK.

Tính tỉ số $S_{HIK} : S_{ABC}$.

GỢI Ý:



Ta có:

$$S_{HIK} = S_{ABC} - S_{AKI} - S_{BKH} - S_{CHI}$$

Áp dụng kết quả bài trên và định nghĩa các tỉ số lượng giác, tính

$$\frac{S_{AKI}}{S_{ABC}} ; \frac{S_{BKH}}{S_{ABC}} ; \frac{S_{CHI}}{S_{ABC}}$$

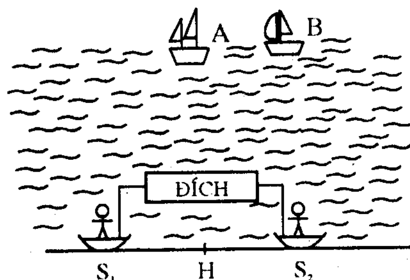
Kết quả: $\dfrac{S_{HIK}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$

Bài 249

Bài toán đua thuyền

Trong dịp Lễ hội kỉ niệm chiến thắng Bạch Đằng của Hưng Đạo vương Trần Quốc Tuấn, người ta tổ chức đua thuyền trên sông Bạch Đằng.

Ở đích đến, có hai người quan sát S_1, S_2 quan sát hai thuyền A, B đang đi đến đích. Với máy đo góc chính xác, người ta ghi nhận các số liệu sau:



$\widehat{S_1S_2B} = 90°$

$\widehat{S_1S_2A} = 80°$

$\widehat{S_2S_1B} = 70°$

$\widehat{AS_1S_2} = 80°$

Thử xem thuyền nào gần đích hơn, biết S_1S_2 = 100 mét

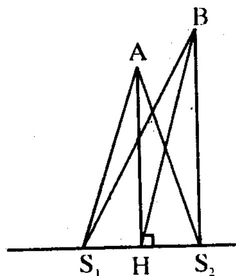
GỢI Ý:

Ta có: ΔS_1AS_2 cân, có góc đáy 80°.

Kẻ $AH \perp S_1S_2$; H là trung điểm của S_1S_2.

$$\frac{AH}{HS_2} = tg80^o \Rightarrow AH = 50\ tg80^o$$

Tương tự



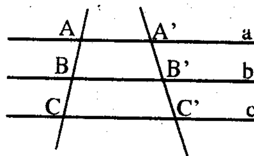
$$\frac{BS_2}{S_1S_2} = tg70^o \Rightarrow BS_2 = 100\ .\ tg70^o$$

Tra bảng lượng giác để tính $tg80^o$ và $tg70^o$ và suy ra câu trả lời!

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. ĐỊNH LÍ THALÈS THUẬN VÀ ĐẢO

1. $a \parallel b \parallel c \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$



2. $a \parallel b$ *và* $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$

(C và C' cùng phía đối với b)

$\Rightarrow a \parallel b \parallel c.$

II. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Δ ABC $\backsim$ Δ A'B'C'

$$\underset{đn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} \end{cases}$$

2. Các trường hợp tam giác đồng dạng

a) $\widehat{A} = \widehat{A'}$ và $\widehat{B} = \widehat{B'}$

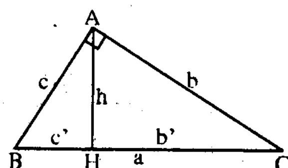
b) $\widehat{A} = \widehat{A'}$ và $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

c) $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$

$\Rightarrow \Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

III. HỆ THỨC LƯỢNG

1. Trong tam giác vuông



$a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = ac'$

$h^2 = b'c'$

$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

2. Trong tam giác bất kì

$\widehat{A} < 90^o$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AH$

$\widehat{A} > 90^o$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AH$

(AH là hình chiếu của AC trên AB).

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 250

Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy các điểm M, N, P, Q sao cho

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA} = \frac{1}{3}$$

a) Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

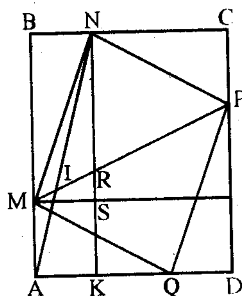
b) Gọi I là giao điểm của AN và MP.

Chứng minh: $\frac{IA}{AN} = \frac{3}{8}$

GIẢI

b) Gọi K là điểm thuộc AD và T là điểm thuộc CD sao cho

$$AK = \frac{1}{3}AD, \quad DT = \frac{1}{3}CD$$



Gọi R là giao điểm của MP với NK; S là giao điểm của MT với NK.

Ta dễ dàng chứng minh được

NK // AB // CD và MT // AD.

Xét hai tam giác đồng dạng IAM và INR ta có

$$\frac{IA}{IN} = \frac{AM}{NR} \quad (1)$$

Vì RS // PT nên:

$$\frac{SR}{TP} = \frac{MS}{MT} = \frac{1}{3}$$

$$TP = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}AB. \quad \text{Vậy } SR = \frac{1}{3}TP = \frac{1}{9}AB$$

Ta đã biết $SN = \frac{2}{3}AB$. Do vậy ta tính được:

$$NR = SN - RS = \frac{5}{9}AB$$

Thay vào (1) ta có:

$$\frac{IA}{IN} = \frac{AM}{NR} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{5}{9}AB} = \frac{3}{5}$$

Từ đây áp dụng tính chất của tỉ lệ thức ta suy ra được

$$\frac{IA}{AN} = \frac{3}{8}$$

NHẬN XÉT:

Trong lời giải trên, giả thiết ABCD là hình chữ nhật được sử dụng ở đâu? Các bạn thử tìm cách thay hình chữ nhật bằng một hình khác để được một bài toán mới.

Bài 251

Cho một hình chữ nhật ABCD. Người ta lấy trên các cạnh AB, BC, CD, DA các điểm E, F, G, H sao cho:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = k$$

a) Chứng minh rằng tứ giác EFGH là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng khi tỉ số k thay đổi thì chu vi hình bình hành EFGH có giá trị không đổi.

c) Tìm điều kiện cho tứ giác ABCD để ta có EFGH là hình chữ nhật.

Bài 252

Trên các cạnh kéo dài của tam giác ABC ta lấy các đoạn AA' = AB, BB' = BC, CC' = CA. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau.

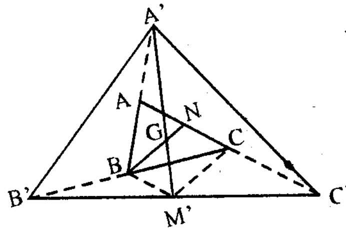
GỢI Ý:

Kẻ trung tuyến BN của ABC và trung tuyến A'M' của A'B'C'. Chứng minh giao điểm của BN và A'M' là trọng tâm của ABC và A'B'C'.

GIẢI

Gọi G là giao điểm của trung tuyến BN của tam giác ABC và trung tuyến A'M' của tam giác A'B'C'.

BM' là đường trung bình của tam giác B'C'C:



BM' // CC' và $BM' = \frac{CC'}{2}$

$\Rightarrow$ BM' // = AN $\Rightarrow$ AB // M'N

$$\Rightarrow \frac{GN}{GB} = \frac{GM'}{GA'} = \frac{M'N}{A'B} = \frac{1}{2}$$

(theo hệ quả của định lí Thalès)

Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC và cũng là trọng tâm của tam giác A'B'C', đpcm.

Bài 253

Cho một tam giác vuông OAB với OA = OB = a. M là một điểm bất kỳ trên AB, P và Q là các hình chiếu vuông góc của M lần lượt trên OA, OB.

a) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì tổng MP + MQ không đổi.

b) Tìm tập hợp trung điểm S của PQ.

c) Gọi I là trung điểm của AB.

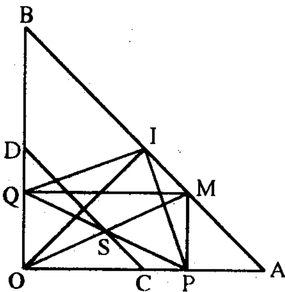
Hãy so sánh các tam giác IOQ và IAP.

Có thể nói gì về vai trò đoạn thẳng IS trong tam giác IPQ.

Chứng minh rằng năm điểm I, Q, O, P, M cách đều một điểm cố định.

d) Cho $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$. Tính theo a, độ dài của đoạn thẳng MP, MQ, OM và PA, PB.

Tính diện tích tứ giác IQOP.



GỢI Ý:

b) S cũng là trung điểm của OM. Suy ra tập hợp S là đường trung bình CD của ΔAOB.

c) ΔIOQ = ΔIAP

Δ IPQ cân, vuông tại I.

IS là trung tuyến, trung trực... của Δ IPQ. SI = SQ = SO = SP = SM

d) Khi $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$ thì $\frac{PA}{PO} = \frac{1}{3}$

$PA = \frac{a}{4}; PO = \frac{3a}{4}; MP = \frac{a}{4}; MQ = \frac{3a}{4}$

$S_{IQOP} = S_{IQO} + S_{IOP}; S_{IQO} = \frac{1}{4}S_{IBO} = \frac{a^2}{16}$

$S_{IOP} = \frac{3}{4}S_{IAO} = \frac{3a^2}{16}; S_{IQOP} = \frac{a^2}{4}$

Bài 254

Cho tam giác ABC. Kẻ trung tuyến AD. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AD.

Kẻ BM. Tia BM cắt cạnh AC ở điểm P. Qua D kẻ đường song song với AC, cắt BP ở điểm P'.

a) Tính các tỉ số $\frac{P'D}{PC}, \frac{PA}{PC}$ **và** $\frac{AP}{AC}$

b) Kẻ CM. Tia CM cắt AB ở Q.

Tính các tỉ số $\frac{AQ}{AB}, \frac{PQ}{BC}$ **và** $\frac{MP}{AB}$

c) Chứng minh các tam giác BAM, BMD, CAM, CMD có diện tích bằng nhau và tính $S_{MAP} : S_{ABC}$

GỢI Ý:

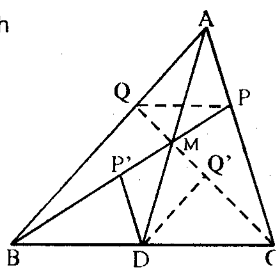
a) Trước hết hãy chứng minh PA = P'D

Đáp số: $\frac{P'D}{PC} = \frac{1}{2}$ $\frac{PA}{PC} = \frac{1}{2}$ $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{3}$

b) Kẻ thêm DQ' // AB. Hãy chứng minh PQ // BC.

Đáp số: $\frac{AQ}{AB} = \frac{1}{3}$; $\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AC} = \frac{1}{3}$

c) Đáp số: $\frac{1}{12}$



Bài 255

Cho hình thoi ABCD. Trên cạnh AB, từ điểm A ta lấy một độ dài AP sao cho $\frac{AP}{AB}$ = m và trên cạnh CD, từ điểm C ta lấy một độ dài CQ sao cho $\frac{CQ}{CD}$ = m với $0 \le m \le 1$.

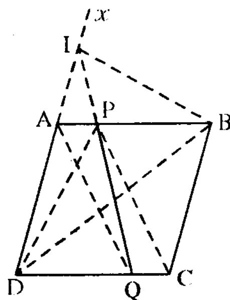
a) Xác định hình dạng các tứ giác DPBQ và AQCP.

b) Các đường thẳng DA và QP cắt nhau tại một điểm I.

Tính tỉ số $\frac{IA}{ID}$.

c) Cho m = $\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng trong trường hợp này IB vuông góc với DB và tìm các trung tuyến của tam giác DIB.

d) Điểm I di chuyển như thế nào khi m thay đổi từ 0 đến 1?



GỢI Ý:

a) Các tứ giác DPBQ và AQCP là những hình bình hành.

b) Xét các tam giác đồng dạng IAP và IDQ.

Ta có:

$$\frac{IA}{ID} = \frac{mAB}{AB(1-m)} = \frac{m}{1-m} (m \neq 1).$$

c) $m = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{1}{2} \Rightarrow AI = AD = AB$

Vậy Δ IBD vuông tại B, P là trọng tâm của tam giác IBD.

d) Khi m = 0 thì $I \equiv A$.

Khi $m \to 1$ thì điểm I chạy ra vô tận trên tia Ax.

Bài 256

Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Qua một điểm I trên đường chéo BD (I ở giữa O và B) ta kẻ một đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt các cạnh AB, BC và phần kéo dài của các cạnh AD, DC ở P, Q, S, R.

Chứng minh các hệ thức

a) $\frac{IP}{OA} = \frac{IB}{OB}$ **b)** $\frac{IP}{IS} = \frac{IB}{ID} \cdot \frac{OD}{OB}$ **c)** $\frac{IP}{IS} = \frac{IQ}{IR}$

d) Chứng minh rằng đường song song với AD kẻ qua điểm P và đường song song với CD kẻ qua điểm Q cắt nhau tại một điểm H thuộc đường chéo BD.

GỢI Ý:

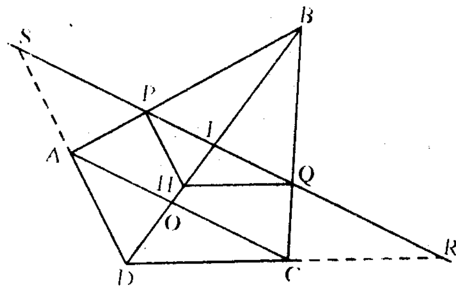
a) Sử dụng định lí Thalès.

b) Tính thêm tỉ lệ thức

$$\frac{OA}{IS} = \frac{OD}{ID}$$

c) Hãy chứng minh:

$$\frac{IQ}{IR} = \frac{IB}{ID} \cdot \frac{OD}{OB}$$



d) Giả sử đường song song với AD kẻ qua P cắt BD ở H, đường song song với DC kẻ qua Q cắt BD ở H'. Chứng minh $H \equiv H'$.

Bài 257

Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với cạnh đáy BC, cắt các cạnh bên AB, AC ở D và E sao cho $DC^2 = BC.\ DE$.

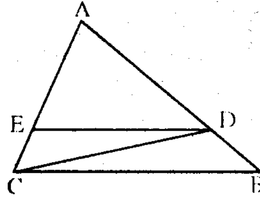
a) Hãy so sánh các tam giác DEC và DBC;

b) Hãy nêu cách dựng đoạn thẳng DE;

c) Chứng minh các hệ thức:

$$AD^2 = AC\ .\ AE$$

$$AC^2 = AB\ .\ AD$$



Gợi ý:

b) $\widehat{ACD} = \widehat{B}$

c) Hãy sử dụng các tam giác đồng dạng.

Bài 258

Trên một đường thẳng Δ cho ba điểm A, D, B theo thứ tự ấy, sao cho AD = 2a và DB = a (a là một độ dài cho trước). Về cùng một phía đối với Δ, ta kẻ các đường Dx, Ay, Bz vuông góc với Δ. Gọi I là một điểm bất kỳ thuộc Dx. AI cắt Bz ở B' và BI cắt Ay ở A'.

a) Đặt DI = x. Tính AA', BB' theo a và x.

b) A'B' cắt AB tại điểm P. Tính BP. Có thể kết luận gì về điểm P?

c) Có thể chọn điểm I sao cho ta có A'B' = 4a được không?

Gợi ý:

a) Xét các cặp tam giác đồng dạng

AA'B và DIB

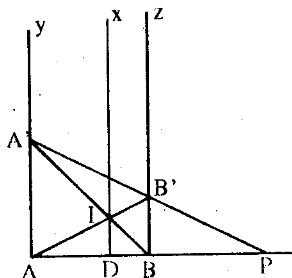
BB'A và DIA

Kết quả AA' = 3x ; BB' = $\frac{3}{2}x$

b) Xét cặp tam giác đồng dạng BB'P và PAA'.

Kết quả: AP = 3a, không phụ thuộc x, P là điểm cố định.

c) Điểm I sẽ được xác định nếu ta biết một trong hai điểm A' hoặc B'. Nếu A'B' = 4a thì PB' = 4a. Từ đây suy ra cách xác định điểm B' để suy ra điểm I.



Chú ý: Các bạn hãy suy nghĩ xem giả thiết Ay, Dx, Bz vuông góc với Δ được sử dụng như thế nào trong khi giải bài toán.

Nếu ta thay điều kiện Ay, Dx, Bz vuông góc với Δ bằng điều kiện Ay // Dx // Bz thì có gì thay đổi trong các cách lập luận và trong các kết quả nhận được từ cách giải?

Bài 259

Cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2AD. Trên cạnh DC có một điểm E sao cho DC = 4DE; gọi O là giao điểm của AE và BD.

Chứng minh $\widehat{AOD} = 90°$.

Gợi ý:

Chứng minh các cặp tam giác sau đây đồng dạng

Δ ABD ∽ Δ DAE

Δ DAE ∽ Δ ODA.

Bài 260

Cho tam giác ABC. Kẻ đường phân giác trong BI và đường phân giác ngoài BD của góc B. Từ I và D kẻ các đường song song với BC, cắt AB tại M và N. Cho biết MI = 12cm, BC = 20cm.

a) Tính AB và MN.

b) Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt BI ở E và BD ở F.

Chứng minh rằng BI.IC = AI.IE

CE = CF.

GỢI Ý:

a) Áp dụng định lí Thalès và định lí về tính chất đường phân giác.

AB = 30cm

MB = 12cm, NB = 60cm.

Bài 261

Cho hình chữ nhật ABCD với AB = a, AD = b. Trên tia DA ta đặt đoạn AF = AB và trên tia BA ta đặt đoạn AE = AD. Nối FC cắt BD ở I và cắt AB ở N. Nối EC cắt BD ở G và AD ở M.

a) Chứng minh MD = BN.

b) Tính diện tích đa giác AMGIN.

c) Chứng minh rằng diện tích đa giác AMGIN bằng tổng diện tích các tam giác IBC và DGC.

GỢI Ý:

a) Hãy sử dụng các cặp tam giác

NBC và FDC

MDC và EBC

b) Hãy xuất phát từ:

$S_{AMGIN} = S_{AMCN} - S_{GIC}$

Kết quả:

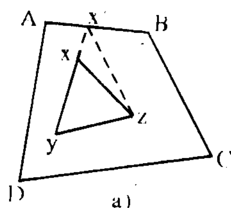
$$S_{AMGIN} = \frac{ab(a^2 + b^2 + 4ab)}{2(a + 2b)(2a + b)}$$

BÀI ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 262

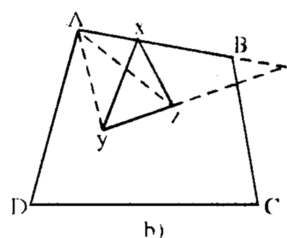
Từ một hình tứ giác ABCD cho trước, hãy cắt ra một tam giác có diện tích lớn nhất.

GIẢI (vắn tắt)



Tam giác phải tìm XYZ không thể có đỉnh ở trong tứ giác ABCD: nếu X ở trong ABCD thì kéo dài YX cắt cạnh (AB) của ABCD tại X' thì (*h.a*)

$$S_{X'YZ} > S_{XYZ}$$

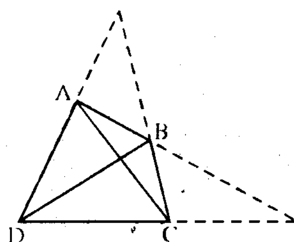


Giả sử X ở trên cạnh (AB) của ABCD. Ta có thể dịch X về đỉnh A hay B và luôn có. (*h.b*)

$$S_{AYZ} \geq S_{XYZ}$$

hoặc $S_{BYZ} \leq S_{XYZ}$

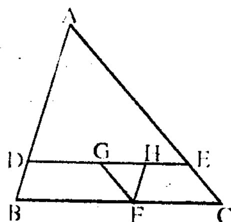
(dấu = khi AB // YZ)



Như vậy, XYZ phải có tất cả các đỉnh trùng với các đỉnh của ABCD. Chỉ còn so sánh diện tích 4 tam giác được cắt ra theo hai

Chứng minh rằng nếu ta cắt ABC theo các đường DE, GF, FH, ta sẽ được 4 mảnh có thể ghép lại để được hai tam giác đồng dạng với tam giác ABC.

GỢI Ý:



Đã có Δ ADE ∽ Δ ABC. Chỉ còn phải ghép ba mảnh BFDG, FCHE và GHE.

- Bạn có thể tìm lại vì sao có cách cắt này, nghĩa là bạn hãy giải bài toán: "Hãy cắt một tam giác cho trước ra bốn mảnh sao cho có thể ghép các mảnh đó lại để được hai tam giác đồng dạng với tam giác đã cho".

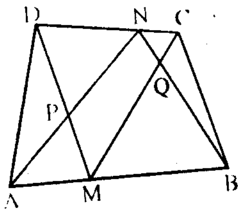
Bài 264

Cho một tứ giác lồi ABCD. Trên hai cạnh AB và CD cho các điểm M và N sao cho AM : MB = CN : ND. Giả sử AN và DM cắt nhau ở P còn CM và BN cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng diện tích của tứ giác MQNP bằng tổng các diện tích của tam giác APD và BCQ.

GỢI Ý:

Tính $S_{MBND} = (S_{MBD} + S_{BND})$ và S_{MANC}.

GIẢI



Đặt $AM = \frac{AB}{n}$; $CN = \frac{CD}{n}$, ta có:

$$S_{BDM} = \frac{n-1}{n} S_{ABD}$$

$$S_{BDN} = \frac{n-1}{n} S_{BDC}$$

Do đó:

$$S_{BDM} + S_{BDN} = S_{MBND} = \frac{n-1}{n} S_{ABCD}$$

Tương tự: $S_{MANC} = \frac{1}{n} S_{ABCD}$

Từ đó : $S_{MBND} + S_{MANC} = S_{ABCD}$

hay là $S_{ABCD} - S_{APD} - S_{BQC} + S_{MQNP} = S_{ABCD}$

Suy ra $S_{MQNP} = S_{APD} + S_{BQC}$, đpcm.

Bài 265

Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến AH và BG sao cho

$$\widehat{CAH} = \widehat{CBG} = 30^\circ$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

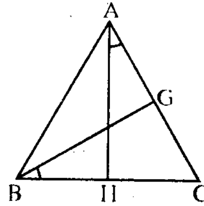
GIẢI

Δ AHC $\backsim$ Δ BGC ($\widehat{A} = \widehat{B}$ và $\widehat{C}$ chung)

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{GC} = \frac{BC}{AC}$ (BC = 2HC; AC = 2GC)

$\Rightarrow$ BC = AC

Tam giác AHC có $\widehat{CAH} = 30^\circ$ và $CH = \dfrac{AC}{2}$, do đó $\widehat{AHC} = 90^\circ$ và $\widehat{ACH} = 60^\circ$.



Suy ra ABC là tam giác đều vì là tam giác cân có một góc 60°.

Bài 266

Cho tam giác ABC, các đường cao AA', BB', CC' giao nhau tại trực tâm H. Gọi M, N, L lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và P, Q, R lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH.

a) Chứng minh rằng các tứ giác LQRN, PQMN, PRML là những hình chữ nhật có chung nhau một tâm là điểm I.

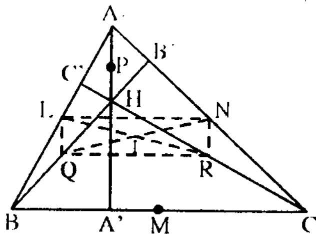
b) Chứng minh rằng IA' = IB' = IC'.

GỢI Ý:

a) Sử dụng tính chất của đường trung bình và định nghĩa của hình chữ nhật.

Chẳng hạn:

NR // AH và $NR = \dfrac{1}{2}AH$



LQ // AH và $LQ = \dfrac{1}{2}AH$

Suy ra LQRN là hình bình hành. Ta lại có NR // AH và QR // BC mà AH $\perp$ BC nên NR $\perp$ QR.

Vậy LQRN là hình chữ nhật.

Các trường hợp khác cũng tương tự.

b) Sử dụng tính chất trung tuyến tương ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông. Chẳng hạn, trong Δ QB'N thì

$$IB' = IQ = IN$$

Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Chú ý: Từ các kết quả của hai câu a) và b) ta có:

$$IA' = IB' = IC' = IM = IN = IL = IP = IQ = IR.$$

Vậy, nếu ta lấy I làm tâm và quay một đường tròn bán kính IA' thì đường tròn này đi qua tất cả các điểm A', B', C', M, N, L, P, Q, R. Do đó, ta có thể phát biểu được mệnh đề sau đây:

Trong một tam giác ABC có trực tâm H, thì 9 điểm sau đây nằm trên một đường tròn:

- Ba điểm chân các đường cao.
- Ba trung điểm của các cạnh.
- Ba trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH.

Đường tròn này thường được gọi là *đường tròn chín điểm* hay là *đường tròn Euler* (*xem* **Để học tốt Toán 9 – Hình học**).

Người ta chứng minh được rằng tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng Euler và là điểm chia đoạn thẳng GH theo tỉ số $\frac{1}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác):

$$IG : IH = 1:3.$$

Bài 267

Cho một hình bình hành ABCD; K là giao điểm của hai đường chéo.

Gọi M, N là trung điểm của các cạnh AD, BC. Các đường thẳng BM, DN cắt đường chéo AC tại các điểm P, Q.

a) Hãy so sánh các đoạn thẳng AP, PQ, QC.

b) Xác định hình dạng tứ giác MPNQ.

c) – Xác định tỉ số $\frac{CA}{CD}$ để cho tứ giác MPNQ là hình chữ nhật.

– Xác định góc ACD để cho tứ giác MPNQ là hình thoi.

Tam giác ACD phải có tính chất gì để tứ giác MPNQ là hình vuông?

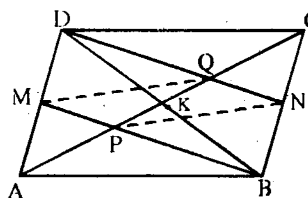
Trong trường hợp này, tìm tỉ số diện tích của hình bình hành ABCD với diện tích hình vuông MPNQ.

GỢI Ý:

a) Kết quả AP = PQ = QC.

b)MPNQ là hình bình hành.

c) Để MPNQ là hình chữ nhật thì



$\frac{CA}{CD} = 3$

– Để MPNQ là hình thoi thì $\widehat{ACD} = 90^o$

MPNQ là hình vuông khi $\frac{CA}{CD} = 3$ và $\widehat{ACD} = 90^o$.

$S_{ABCD} : S_{MPNQ} = 6.$

Bài 268

Cho một tam giác đều ABC. Từ một điểm O thuộc miền trong của tam giác, ta kẻ các đường song song MN với BC, ED với AB, FK với AC.

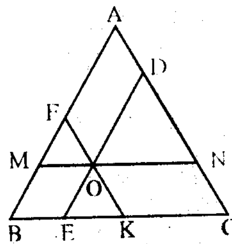
Chứng minh rằng tổng

$$MN + ED + FK$$

không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

GIẢI (vắn tắt)

Cách 1:



Δ AMN đều: MN = AM

OEBM là hình bình hành: OE = MB

OFAD là hình bình hành: OF = AD

Δ DON đều: OD = DN

OKCN là hình bình hành: OK = NC

Cộng các đẳng thức trên vế với vế ta suy ra:

MN + ED + FK = 2AB (Không đổi).

Cách 2:

Bài toán này về mặt hình vẽ và giả thiết làm ta nhớ đến bài 200. Do vậy, ta tìm cách sử dụng kết quả bài 200. Theo kết quả ấy, ta có:

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1 \qquad (1)$$

Tam giác ABC có MN // BC. Theo định lí Thalès:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{BC - MN}{BC} = \frac{AC - AN}{AC}$$

$$1 - \frac{MN}{BC} = \frac{CN}{CA} \qquad (2)$$

Tương tự, ta có $1 - \frac{KF}{AC} = \frac{AF}{AB} \qquad (3)$

$$1 - \frac{ED}{AB} = \frac{BE}{BC} \qquad (4)$$

Cộng (2), (3), (4) vế với vế, và chú ý rằng AB = AC = BC, rồi so với (1) ta có:

$$3 - \frac{MN + ED + FK}{AB} = 1$$

hay MN + ED + FK = 2AB.

Kết hợp cả ba bài toán : 268, 200 và 120 ta có bài toán:

"Cho tam giác đều ABC và một điểm O ở trong tam giác. Qua O ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh:

MN song song với BC;

ED song song với AB;

FK song song với AC;

và kẻ các đường vuông góc OI vuông góc với AB;

OJ vuông góc với AC;

OH vuông góc với BC;

thì các tổng sau đây không phụ thuộc vào vị trí của điểm O:

a) OI + OJ + OH

b) MN + ED + FK

c) $\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA}$

Bài 269

Cho một tam giác ABC (AC > AB), vuông tại A. Cho biết AB = c và AC = b. Dựng trên AB, AC và về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân ABD và ACE có các cạnh huyền lần lượt là AB, AC.

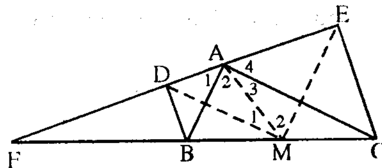
a) Chứng minh rằng các điểm E, A, D thẳng hàng.

b) Tính diện tích tứ giác BDEC theo b, c.

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng tam giác DME vuông.

d) Đường thẳng ED cắt đường thẳng CB tại F. Hãy tính các tỉ số $\frac{FB}{FC}$ và $\frac{FB}{BC}$ theo b, c.

GỢI Ý:



a) Hãy tính tổng: $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4$

b) $S_{BDEC} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

c) Hãy tính tổng $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2$

d) Xét cặp tam giác FBD và FCE

Kết quả $\frac{FB}{FC} = \frac{c}{b}$ $\qquad \frac{FB}{BC} = \frac{c}{b-c}$

CHÚ Ý – Hãy:

1. Trình bày ý nghĩa của giả thiết AC > AB đối với bài toán. Nếu không có giả thiết này thì có thể có kết quả gì?

2. Qua cách giải, lưu ý thêm một phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Bài 270

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I là trung điểm của AB. Trên tia DC đặt đoạn CM = a, trên tia BC đặt đoạn CN = 2a, trên tia CD đặt đoạn DP = 2a, trên tia DA đặt đoạn AQ = 3a.

a) Chứng minh rằng các tam giác IAD, MCN, PDQ đồng dạng. Hãy so sánh các đoạn thẳng ID, MN và PQ về độ lớn và về phương của chúng.

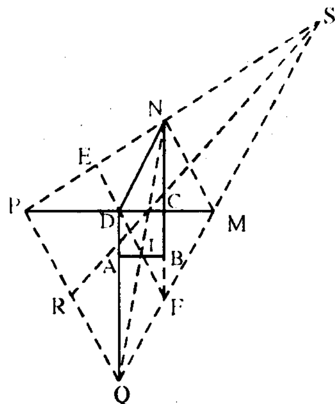
b) Xác định hình dạng của tam giác MPQ và của tứ giác MNPQ.

c) Gọi E là trung điểm của PN, F là trung điểm của QM. Chứng minh rằng bốn điểm E, D, I, F thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng I là trung điểm của NQ.

e) Đường thẳng QM cắt đường thẳng PN ở S. Gọi R là trung điểm của PQ.

Chứng minh rằng ba đường thẳng SR, QN, CD đồng quy.



GỢI Ý:

b) Δ MPQ cân. Tứ giác MNPQ là hình thang.

d) Chứng minh NFQD là hình bình hành.

e) Chứng minh M là trung điểm của SQ, N là trung điểm PS.

CHÚ Ý: Hãy rút ra một phương pháp để chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

Bài 271

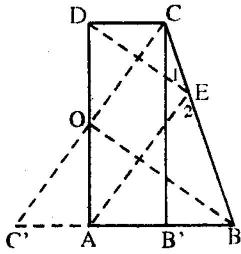
Cho một hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$), AB = a, CD = b và BC = a + b.

a) Chứng minh hệ thức $AD^2 = 4ab$.

b) Gọi E là một điểm nằm trên cạnh BC sao cho BE = a. Chứng minh rằng tam giác DEA là tam giác vuông.

c) Gọi O là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh rằng DE vuông góc với OC, AE vuông góc với OB.

d) Tính góc BOC.



GỢI Ý:

a) Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác BB'C.

b) Tính $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2$

c) Chứng minh OC là trung trực của DE.

d) $\widehat{BOC} = 90^o$.

Bài 272

Cho một hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$), AD = a, AB = b, DC = c. Gọi I là giao điểm của các đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau là hệ thức sau đây được thỏa mãn:

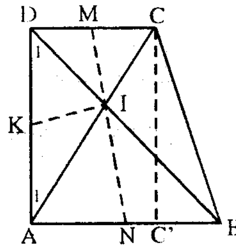
$$a^2 = bc \ (*)$$

b) Gọi K là trung điểm của cạnh bên AD; M, N là trung điểm của các cạnh đáy DC, AB. Giả sử rằng hệ thức (*) được thỏa mãn. Chứng minh rằng MN vuông góc với KI.

c) Chứng minh rằng nếu hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau thì ta có hệ thức:

$$BC^2 = AB^2 + DC^2 - AD^2$$

Điều ngược lại có đúng không?



GỢI Ý:

a) Chứng minh:

$AC \perp BD \Rightarrow a^2 = bc$

Hãy để ý đến các tam giác ADC và BAD.

Ngược lại:

$a^2 = bc \Rightarrow AC \perp BD$.

Hãy tính tổng $\widehat{A}_1 + \widehat{D}_1$

c) Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác BCC'. Hãy chứng minh điều ngược lại cũng đúng.

Bài 273

Cho một tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng nếu điều kiện cần và đủ để góc B gấp đôi góc C là:

$$AC^2 = AB(AB + BC) \quad (*)$$

b) Giả sử hệ thức (*) được thỏa mãn, góc C phải nhận những giá trị trong khoảng nào để tam giác ABC có tất cả các góc đều nhọn.

GỢI Ý:

a) Từ hệ thức $AC^2 = AB(AB + BC)$

Hãy nghĩ đến việc xét sự đồng dạng của tam giác ABC với một tam giác có chung cạnh AC và có một cạnh có độ dài bằng AB + BC.

d) Đáp số: $30^\circ \le \widehat{C} \le 45^\circ$.

Bài 274

Cho hai điểm A, B ở trên một đường thẳng d. Trong cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d ta kẻ hai tia Ax, By vuông góc với d và lấy trên Ax một điểm C, trên By một điểm D sao cho hệ thức sau đây được thỏa mãn:

$$AB^2 = 4AC.BD \qquad (1)$$

a) Chứng minh rằng CD = AC + BD.

b) Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh hệ thức:

$$CD^2 = OC^2 + OD^2$$

c) Gọi M là hình chiếu của điểm O trên đoạn thẳng CD. Chứng minh rằng khi hai điểm C, D di chuyển trên Ax, By nhưng hệ thức (1) vẫn được thỏa mãn thì OM có độ dài không đổi.

d) Gọi N là giao điểm của AD và BC, P là giao điểm của OC và AM, Q là giao điểm của OD và BM. Hãy chứng minh:

α) MN // AC;

β) PQ // AB;

γ) Ba điểm P, N, Q thẳng hàng.

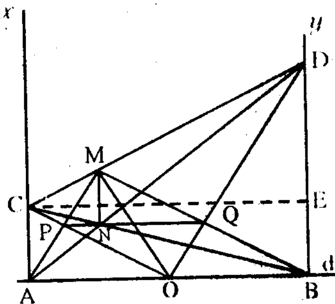
GỢI Ý:

a) Kẻ đường CE ⊥ BD.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác CED.

b) Chứng minh Δ COD vuông.

c) Áp dụng kết quả câu b) hoặc chứng minh tam giác AMB vuông.



d) α) Chứng minh: $\frac{AN}{ND} = \frac{CM}{MD}$

β) Nhận xét P là trung điểm AM. Q là trung điểm BM.

γ) Thay việc chứng minh ba điểm P, N, Q thẳng hàng bằng việc chứng minh ba đường thẳng PQ, AD, BC đồng quy tại điểm N (sử dụng định lý đảo của định lý chùm đường thẳng đồng quy cắt các đường thẳng song song).

Bài 275

Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC ta lấy hai điểm P, Q sao cho

$$\frac{BP}{1} = \frac{PQ}{2} = \frac{QC}{3}$$

và trên cạnh AC, lấy một điểm R sao cho:

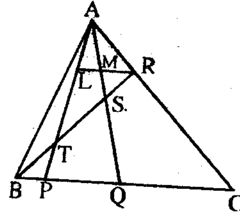
$$\frac{RA}{RC} = \frac{1}{2}.$$

BR cắt AP ở T và AQ ở S.

Tính tỉ số diện tích tứ giác PQST và diện tích tam giác ABC.

(Đề thi tuyển sinh Khoa sinh vật
Trường Đại học Tổng hợp Mascơva 1983)

GỢI Ý:



Từ R kẻ đường song song với BC cắt AQ ở M, AP ở L.

$$\frac{SR}{BS} = \frac{1}{3} \qquad \frac{S_{SBQ}}{S_{RBC}} = \frac{3}{8}$$

Ta cũng có

$$\frac{LR}{PC} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{TR}{BT} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{S_{TBP}}{S_{RBC}} = \frac{1}{16}$$

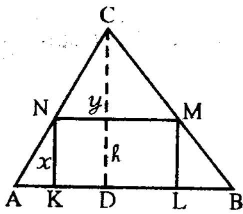
với $S_{PQST} = S_{SBQ} - S_{TBP} = \frac{5}{16} S_{RBC}$

Mặt khác $\frac{S_{RBC}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3}; \ \frac{S_{PQST}}{S_{ABC}} = \frac{5}{24}$.

Bài 276

Cho một tam giác có ba góc nhọn. Hãy nội tiếp trong tam giác ấy một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

GIẢI (vắn tắt)



Cách 1.

Phân tích: Giả sử ta đã dựng được hình chữ nhật KLMN nội tiếp trong tam giác ABC, sao cho hai đỉnh K, L nằm trên AB, M trên CB, N trên AC. Kẻ đường cao CD và đặt:

AB = c, CD = h, NK = x, KL = y

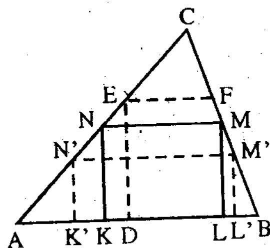
Δ CMN $\backsim$ Δ CBA $\Rightarrow$ $y = \frac{c}{h}(h - x)$

Vậy $S_{KLMN} = xy = x \cdot \frac{c}{h}(h - x) = \frac{ch}{4} - \frac{c}{h}\left(x - \frac{h}{2}\right)^2$

S_{KLMN} đạt giá trị lớn nhất khi $\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 = 0$ tức là $x = \frac{h}{2}$ hay MN là đường trung bình của tam giác ABC. Lúc đó: $S_{KLMN} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

Cách 2:

Ta dựng hình chữ nhật KLMN có MN là đường trung bình của Δ ABC. Ta chứng minh đó chính là hình chữ nhật có diện tích lớn nhất trong các hình chữ nhật nội tiếp trong Δ ABC.



Giả sử hình chữ nhật K'L'M'N' cũng nội tiếp trong Δ ABC, và điểm N' thuộc đoạn AN. Như vậy AN' < N'C. Trên N'C ta có thể lấy một điểm E sao cho N'E = AN'. Kẻ qua E đường thẳng song song với AB, cắt BC ở F. Hình thang ABFE nhận đoạn thẳng M'N' làm đường trung bình và có chiều cao ED = 2K'N'. Ta có:

$$S_{ABFE} = M'N'.ED = 2M'N'.K'N' = 2S_{K'L'M'N'} \quad (1)$$

Nhưng rõ ràng là $S_{ABFE} < S_{ABC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$S_{K'L'M'N'} < \frac{1}{2} S_{ABC}$$

hay $S_{K'L'M'N'} < S_{KLMN}$

Trường hợp điểm N' thuộc đoạn NC, ta cũng chứng minh được

$$S_{K'L'M'N'} < S_{KLMN}$$

hay hình chữ nhật nhận đường trung bình MN làm một cạnh là hình chữ nhật phải tìm.

CHÚ Ý: Các bạn hãy suy nghĩ về các vấn đề sau:

1. Bài toán này có bao nhiêu nghiệm hình?

2. Tại sao có giả thiết tam giác có ba góc nhọn? Nếu giả thiết này không được thỏa mãn thì sao? Giả thiết tam giác có ba góc nhọn được sử dụng ở chỗ nào trong quá trình giải bài toán?

Bài 277

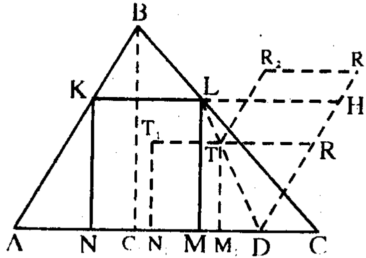
Cho một tam giác ABC có các góc nhọn. Dựng một hình chữ nhật nội tiếp trong tam giác ABC có chu vi 2p cho trước.

GIẢI

Phân tích:

Giả sử $\hat{A} \neq 45^{0}$ và đã dựng được hình chữ nhật KLMN. Trên cạnh AC lấy đoạn AD = p. Kẻ DR // AB. Kéo dài KL cắt DR tại H. Ta có LM = LH;

$$LK + ML = KL + LH = p$$



Vậy L phải là giao điểm của BC với tập hợp các điểm có khoảng cách đến AC bằng LH.

Cách dựng:

Trên cạnh AC, lấy điểm D sao cho AD = p. Lấy điểm N_1 bất kỳ trên đoạn AD, dựng $N_1T_1 \perp AC$

và T_1R // AC. Trên DR lấy điểm R_1 tùy ý, kẻ R_1R_2 // AC và $R_1R_2 = N_1T_1$. Kẻ R_2x // DR, cắt T_1R tại T. Đường thẳng DT cắt BC tại L. Từ L ta dựng được hình chữ nhật LKNM.

Chứng minh:

$$\Delta\, TM_1D \backsim \Delta\, LMD \Rightarrow \frac{TM_1}{LM} = \frac{TD}{LD}$$

$$\Delta\, TDR \backsim \Delta\, LDH \Rightarrow \frac{TR}{LH} = \frac{TD}{LD}$$

Từ đó ta có LM = LH ($TM_1 = TR$)

Biện luận:

Đặt KL = x, AC = a, BC_1 = n, ta có

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h-(p-x)} \Rightarrow x = \frac{a(p-h)}{a-h}(a \neq h),\ 0 < x < a$$

$$\begin{cases} p > h \\ a > h \\ p < a \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} p < h \\ a < h \\ p > a \end{cases}$$

Để dựng được hình chữ nhật LKNM thì điều kiện cần và đủ là:

1. Các góc của tam giác phải nhỏ hơn hay bằng 90^o;

2. Với h < a thì h < p < a;

   Với a < h thì a < p < h;

Đặc biệt, với a = h thì a = p = h.

Bài 278

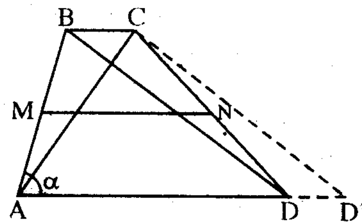
Dựng một hình thang biết một góc, hai đường chéo và đường trung bình của hình thang.

GỢI Ý:

Giả sử ta cần dựng hình thang ABCD với các dữ kiện cho trước:

$AC = l$, $BD = m$, $MN = n$

và $\widehat{A} = \alpha$



Từ C kẻ đường song song với BD, cắt AD tại D'. Ta có thể dựng được tam giác phụ ACD' vì $AC = l$, $CD' = BD = m$ và $AD' = 2n$.

Sau đó, ta xác định các đỉnh B, D như sau:

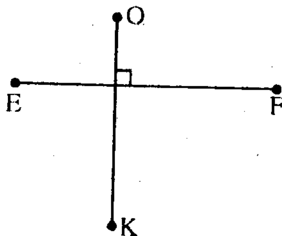
– Đỉnh B. Tìm giao điểm của đường thẳng song song với AD kẻ từ C với đường thẳng Ax kẻ từ A hợp với AD' một góc α.

– Đỉnh D. Tìm giao điểm của AD' với đường song song kẻ từ B với CD' (hoặc giao điểm của AD' với cung tròn tâm B, bán kính m).

Bài toán chỉ có nghiệm khi $\alpha < 180°$ và

$$|l - m| < 2n < l + m$$

Bài 279



Đố vui: *Hình gì đây?*

Một học sinh vẽ lên bảng một hình thang ABCD (với AB // CD), đường trung bình EF và đoạn thẳng OK, kẻ từ giao điểm O của hai đường chéo đến cạnh đáy lớn AB. Trong giờ ra chơi, một học sinh tinh nghịch đem

xóa tất cả các yếu tố khác, chỉ giữ lại có hai đoạn thẳng EF và OK như hình vẽ. Các bạn thử khôi phục lại hình thang ABCD!

Bài 280

Dựng một tứ giác ABCD cho biết các cạnh AB = m, CD = n, các đường chéo AC = p, BD = q và góc giữa hai đường chéo là α.

GỢI Ý:

Kẻ AE // BD

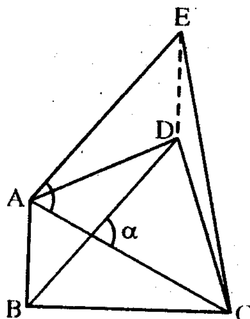
DE // AB.

Dựng tam giác AEC với AE = q

AC = p

và $\widehat{EAC} = \alpha$

Sau đó xác định điểm D bằng cách tìm giao điểm của hai cung tâm E, bán kính m và tâm C bán kính n.



Các bạn tìm cách dựng điểm B.

Bài 281

Cho một đường gấp khúc ABCDE (như hình vẽ, với AB song song với DE) giới hạn một mảnh vườn. Người ta muốn rào lại mảnh vườn theo đường gấp khúc lồi AMNE để làm mất góc lõm C nhưng vẫn đảm bảo yêu cầu không làm thay đổi diện tích mảnh vườn.

a) Hãy tìm một vị trí thích hợp của đoạn thẳng MN.

b) Biện luận về số lời giải.

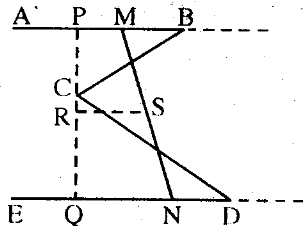
GIẢI (vắn tắt)

Kẻ qua C đường PQ vuông góc với AB, ED. Như vậy, ta chỉ cần tìm một đoạn MN sao cho diện tích của tứ giác PQNM bằng tổng diện tích hai tam giác PBC và QDC là đủ.

Gọi CP = h, CQ = h', PB = a,

QD = a', PM = x, QN = x'.

Từ $S_{PQNM} = S_{PBC} + S_{QDC}$ ta có:



$$\frac{x + x'}{2}(h + h') = \frac{ah}{2} + \frac{a'h'}{2} \quad (1)$$

Nếu gọi RS là đường trung bình của hình thang PQNM thì

$$RS = \frac{x + x'}{2}$$

Từ (1) ta có $RS = \frac{ah + a'h'}{2(h + h')}$. Từ đây ta có cách dựng: Kẻ PQ ⊥ AB (và ED). Qua trung điểm R của PQ kẻ đường vuông góc với PQ và lấy trên đó đoạn $RS = \frac{ah + a'h'}{2(h + h')}$

Ta được điểm S. Qua S kẻ một đường thẳng cắt AB ở M và ED ở N. Đó chính là đoạn MN phải dựng.

b) Bài toán có vô số lời giải. Mọi đường thẳng qua S mà cắt AB đều chấp nhận được.

Bài 282

Cho hai đường thẳng xx' và y'y. Tìm tập hợp những điểm M trong mặt phẳng sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường thẳng ấy bằng một độ dài *l* cho trước.

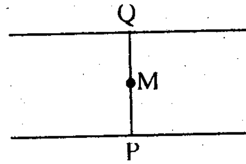
GIẢI (vắn tắt)

1. x'x // y'y

Gọi h là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song x'x và y'y thì:

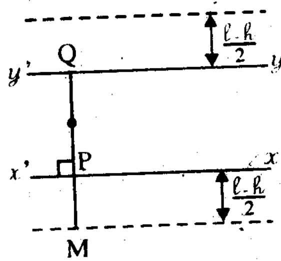
a) nếu $l < h$: Tập hợp điểm M là tập hợp rỗng

b) Nếu l = h thì tập hợp các điểm M mà MP + MQ = l = h = PQ là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng x'x và y'y.



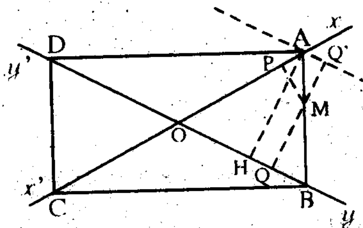
c) Nếu l > h thì MP = $\dfrac{l - h}{2}$.

Ta thấy ngay M di chuyển trên một đường thẳng a song song với x'x và cách x'x một khoảng MP = $\dfrac{l - h}{2}$. Do tính chất đối xứng M cũng chạy trên một đường thẳng a' song song với y'y và cách y'y một đoạn $\dfrac{l - h}{2}$. Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng a và a' nằm ngoài phần mặt phẳng giới hạn bởi x'x và y'y, song song với x'x hoặc y'y và cách mỗi đường này một khoảng là $\dfrac{l - h}{2}$.



2. x'x và y'y giao nhau tại một điểm O.

Ta xét trường hợp điểm M nằm trong góc xOy. Ta cần tìm tập hợp điểm M sao cho MP + MQ = l (không đổi). M chạy trên đoạn thẳng AB sao cho tam giác AOB cân, đỉnh là O và có đường cao AH = l



Ta dựng điểm A như sau: Dựng đường thẳng song song

và cách y'y một đoạn là l. Đường này cắt x'x tại A. Việc dựng tam giác cân AOB là dễ dàng.

Khi M nằm trong góc x'Oy thì tập hợp điểm M là đoạn BC. Khi M nằm trong góc x'Oy' thì tập hợp điểm M là đoạn thẳng CD. Khi M nằm trong góc y'Ox thì tập hợp điểm M là đoạn thẳng DA.

Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Vậy tập hợp điểm M là hình chữ nhật ABCD có các đỉnh A, B, C, D nằm trên các đường thẳng x'x, y'y và khoảng cách từ mỗi đỉnh đến đường thẳng không chứa nó bằng l.

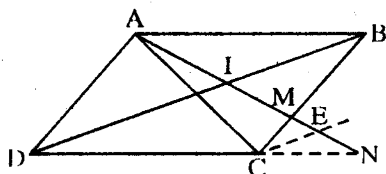
Bài 283

Cho một hình bình hành ABCD. Một đường thẳng đi qua đỉnh A cắt đường chéo BD ở điểm I, cắt cạnh BC ở điểm M và cắt đường thẳng DC ở điểm N.

a) Chứng minh $\frac{IN}{IA} = \frac{IA}{IM}$

b) Một đường thẳng đi qua đỉnh C và song song với đường chéo BD cắt AN tại điểm E.

Chứng minh bốn điểm A, E, N, M hợp thành một hàng điểm điều hòa.



Gợi ý:

a) Sử dụng định lí Thalès

b) Kết luận dựa theo hệ thức Newton

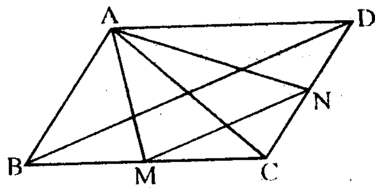
Bài 284

Cho hình bình hành ABCD có diện tích S.

a) Hãy dựng hai đường thẳng AM, AN chia hình bình hành thành ba phần có diện tích bằng nhau.

b) Tính diện tích của tam giác AMN.

GỢI Ý:



a) $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$;

$\dfrac{DN}{DC} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{S_{AMCN}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{3}$;

Từ đó các bạn suy ra cách dựng.

b) Dễ thấy MN // DB, và Δ CMN $\backsim$ Δ CBD

$S_{CMN} = \dfrac{1}{18}S$ $\quad$ $S_{AMN} = \dfrac{1}{3}S - \dfrac{1}{18}S = \dfrac{5}{18}S$

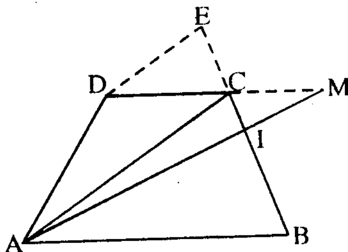
Bài 285

Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB = 2a, CD = a. Hãy dựng điểm M trên đường thẳng CD sao cho:

a) Đường thẳng AM cắt hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.

b) Đường thẳng AM cắt hình thang thành hai phần mà phần có đỉnh D có diện tích bằng n – 1 lần diện tích phần kia (n là số tự nhiên lớn hơn 2).

GỢI Ý:



a) Nối AC, qua D kẻ Dy // AC, cắt đường thẳng BC tại E. Gọi I là trung điểm EB: Nối AI, cắt đường thẳng DC ở M. M là điểm phải dựng.

b) Giải như câu a. Thay cho việc lấy I là trung điểm EB ta lấy điểm J để:

$$\frac{JB}{EB} = n$$

Bài 286

Cho tam giác ABC; N là trung điểm của AB, M là trung điểm của AC; P và Q là các điểm nằm trên BC sao cho BP = PQ = QC; BM cắt NP và AQ tại K và L. So sánh diện tích tam giác ABC với diện tích tứ giác KLQP.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán cấp II Hà Nội – 1981)

GIẢI (vắn tắt)

K là trung điểm của BL.

$$S_{PKB} = S_{PKL} = S_1$$

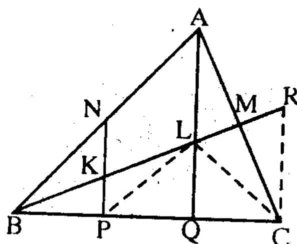
Ta cũng có

$$S_{LBP} = S_{LPQ} = S_{LQC} = S_2 = 2S_1$$

Kẻ CR // AQ cắt BM kéo dài tại R. Ta có:

$$S_{ALC} = S_{LCK} \Rightarrow S_{LQCR} = S_{ACQ}$$

hay $S_{LQCR} = \dfrac{S_{ABC}}{3}$ (1)



Mặt khác:

$$\frac{S_{BKP}}{S_{BRC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{BRC} = 9S_1$$

Suy ra $S_{LQCR} = 5S_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABC} = 15S_1$ và $S_{KLQP} = 3S_1$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLQP}} = 5$$

Bài 287

Trong tam giác đều ABC, ta vẽ các đoạn thẳng AK, BL và CM, và được diện tích các tam giác PQR, AMP, BKQ và CLR tương ứng bằng S_0, S_1, S_2 và S_3 với

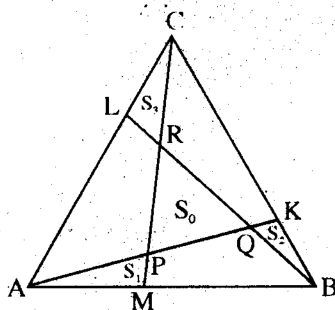
$$S_0 = S_1 + S_2 + S_3$$

Chứng minh rằng AM + BK + CL = AB

(Đề thi vô địch toán lớp 10, CHLB Nga, 1991)

GỢI Ý:

Gọi a, b, c là diện tích của các tứ giác tương ứng CKQR, APRL và BQPM; gọi S là diện tích tam giác ABC.



$$\frac{S_1 + c + S_2}{S} = \frac{BK}{BC}, \frac{S_2 + a + S_3}{S} = \frac{CL}{CA},$$

$$\frac{S_3 + b + S_1}{S} = \frac{AM}{AB}.$$

Cộng từng vế các đẳng thức này và sử dụng các giả thiết (ABC đều; $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$).

Bài 288

Hình thang ABCD (AD // CB và AD > CB) có các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, và có đường trung bình bằng m. Trên đáy AD ta lấy một điểm M sao cho AM = m. Tìm chiều dài của đoạn MC.

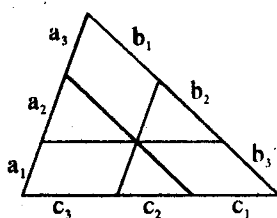
(Đề thi vô địch toán lớp 9, CHLB Nga, 1991).

Bài 289

Đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối diện của một tứ giác lồi làm thành với các đường chéo của tứ giác hai góc bằng nhau. Chứng minh rằng tứ giác đó có hai đường chéo bằng nhau.

(Đề thi vô địch toán lớp 9, ngày thi thứ nhất, Liên Xô, 1990)

Bài 290



Qua một điểm tùy ý trong tam giác, người ta kẻ ba đường thẳng song song với các cạnh của nó, chia các cạnh thành những đoạn thẳng a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, như hình vẽ. Chứng minh rằng:

$$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3.$$

(Đề thi vô địch toán lớp 7, ngày thi thứ hai, Liên Xô, 1990)

Bài 291

Cho một tam giác bất kì ABC. Một đường thẳng d cắt tam giác sao cho khoảng cách từ đỉnh A đến d bằng tổng các khoảng cách từ các đỉnh B và C đến d. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng d như vậy đều đồng quy tại một điểm.

(Đề thi vô địch toán lớp 7, vòng II, Mascơva 1963)

GỢI Ý:

Xét các trường hợp đặc biệt khi d qua B và d qua C. Từ đó, suy ra kết luận cho trường hợp tổng quát.

Bài 292

Cho một tứ giác lồi ABCD và một điểm M thuộc miền trong của tứ giác; P, Q, R và S đối xứng với M qua trung điểm các cạnh của ABCD. Tìm diện tích của tứ giác PQRS.

(Đề thi vô địch toán Mascơva, 1963)

GỢI Ý:

Gọi diện tích ABCD là s. Các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh của ABCD tạo thành một hình bình hành có diện tích s/2. Các đoạn thẳng đó lại là đường trung bình của các tam giác MPQ, MQR, MRS, MSP. Đáp số 2s.

Bài 293

Cho tam giác ABC trong đó cạnh AB lớn hơn cạnh BC. Vẽ các đường phân giác AK và CM (K trên BC và M trên AB). Chứng minh rằng AM > MK > KC.

(Đề thi vô địch toán lớp 9. vòng I. Mascova. 1965)

GỢI Ý:

Chứng minh rằng MK cắt AC kéo dài về phía C, suy ra

$\widehat{ACM} = \widehat{MCK} > \widehat{CMK}$.

Bài 294

Cho một hình lục giác ABCDEF, trong đó các góc ở đỉnh A, C, E bằng nhau và không vượt quá 180°, đồng thời

$$\widehat{ABF} = \widehat{CBD} = \widehat{AFB} = \widehat{EFD}$$

Chứng minh rằng nếu điểm A', đối xứng với đỉnh A qua đường chéo BF, không nằm trên đường thẳng CE thì tứ giác A'CDE là hình bình hành.

(Đề gửi đến Hội đồng thi toán quốc tế; 1983, do Bỉ đề nghị)

GỢI Ý:

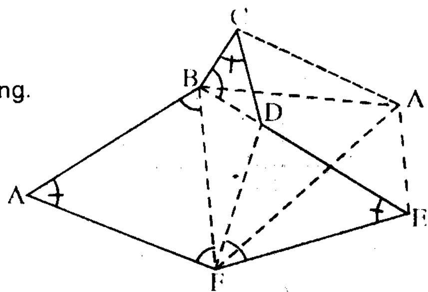
Chứng minh các cặp tam giác đồng dạng.

FA'E và FBD

A'BF và EDF

A'BC và FBD

Do đó: FA'E và A'BC đồng dạng.



Suy ra : $\frac{A'C}{FE} = \frac{A'B}{FA'} = \frac{ED}{FE}$

tức A'C = ED

Tương tự: A'E = CD.

Bài 295

Trên cạnh BC của một tam giác ABC ta lấy một điểm P sao cho PC = 2PB. Tính góc ACB, nếu $\widehat{ABC} = 45°$ và $\widehat{APC} = 60°$.

(Thi vô địch toán CHDC Đức. năm 1964)

GỢI Ý:

Lấy C_1 đối xứng với C qua AP. Chứng minh $\widehat{C_1BP} = 90^{\circ}$. Suy ra A là giao điểm của đường phân giác trong (tại B) và hai đường phân giác ngoài của tam giác BC_1P.

Bài 296

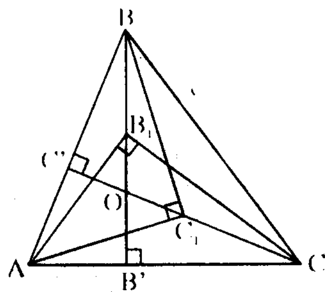
Các đường cao của một tam giác có ba góc nhọn ABC cắt nhau tại O; trên các đoạn thẳng OB và OC người ta lấy các điểm B_1 và C_1 sao cho

$$\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^{\circ}$$

Chứng minh rằng $AB_1 = AC_1$

(Thi vô địch toán New York. 1976)

GỢI Ý:



Gọi B' và C' là chân các đường cao của ABC. Xét các cặp tam giác đồng dạng:

AB_1C và $AB'B_1$

ABB' và ACC'

AC_1B và $AC'C_1$

ta có

$$AB_1^2 = AB'.AC = AC'.AB = AC_1^2$$

Bài 297

Ở miền trong của tam giác ABC ta lấy một điểm P và trên các cạnh AC và BC lấy các điểm tương ứng M và L sao cho

$\widehat{PAC} = \widehat{PBC}$ **và** $\widehat{PLC} = \widehat{PMC} = 90^\circ$.

Chứng minh rằng nếu D là trung điểm của cạnh AB thì DM = DL

(Thi vô địch toán Nam Tư, 1983)

GỢI Ý:

Lấy E và F, trung điểm của các đoạn thẳng AP và BP. Chứng minh hai tam giác DEM và DFL bằng nhau.

Bài 298

Gọi B_{ij} với i, j ∈ {1; 2; 3} là điểm đối xứng của đỉnh A_i của tam giác $A_1A_2A_3$ qua đường phân giác của góc A_j. Chứng minh rằng các đường thẳng $B_{12}B_{21}$, $B_{13}B_{31}$ và $B_{23}B_{32}$ song song với nhau.

(Thi vô địch toán Bungari, 1982)

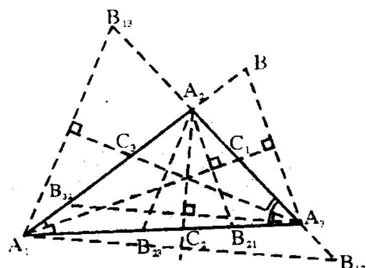
GỢI Ý:

A_2A_3 và $B_{21}B_{31}$ cắt nhau ở C_1 trên đường phân giác của góc A_1.

Chứng minh hai tam giác $B_{12}C_1B_{21}$ và $B_{13}C_1B_{31}$ đồng dạng:

$$\frac{B_{12}C_1}{B_{13}C_1} = \frac{B_{12}A_2 - C_1A_2}{B_{13}A_3 - C_1A_3} = \frac{A_1A_2 - C_1A_2}{A_1A_3 - C_1A_3}$$

$$= \frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$



Tương tự:

$$\frac{B_{21}C_1}{B_{31}C_1} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$

Bài 299

Chứng minh rằng nếu một ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và các góc thỏa mãn các bất đẳng thức:

$$\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C} \geq \hat{D} \geq \hat{E}$$

thì đó là ngũ giác đều.

Bài 300

Cho tam giác $P_1P_2P_3$; P là một điểm ở trong tam giác đó: P_1P, P_2P và P_3P cắt các cạnh đối diện ở Q_1, Q_2, Q_3. Chứng minh rằng trong các tỉ số

$$\frac{P_1P}{PQ_1};\ \frac{P_2P}{PQ_2};\ \frac{P_3P}{PQ_3}$$

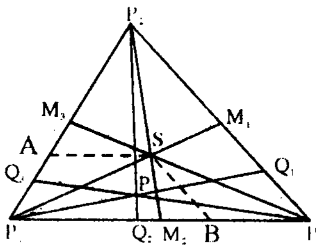
có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2.

(Đề thi vô địch toán quốc tế lần thứ ba, 1961)

GIẢI

Ta kẻ các đường trung tuyến P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 cắt nhau ở S, chia tam giác đã cho thành 6 tam giác SM_1P_2, SP_1M_2,...

Nếu P trùng với S thì cả ba tỉ số cùng bằng 2 và bài toán đã được giải.



Giả sử P ≢ S, thế thì P nằm trong (hoặc trên các cạnh) của một trong 6 tam giác SM_iP_j.

Giả sử P nằm trong tam giác SM_2P_1.

Ta vẽ SA // P_1P_3 (A trên P_1P_2) và SB // P_2P_3 (B trên P_1P_3). Ta có

$$\frac{P_1B}{BP_3} = \frac{P_2A}{AP_1} = 2.$$

Do đó điểm B nằm giữa M_2 và P_3 và tam giác SM_2P_1 nằm trong hình thang $ASBP_1$

· Gọi C là giao điểm của SA với đoạn thẳng PP_2 và D là giao điểm của SB với đoạn thẳng PQ_1. Ta có:

$$\frac{P_1P}{PQ_1} \leq \frac{P_1D}{DQ_1} = \frac{P_1S}{SM_1} = 2.$$

$$\frac{P_2P}{PQ_2} \geq \frac{P_2C}{CQ_2} = \frac{P_2S}{SM_2} = 2.$$

nghĩa là tỉ số $P_1P : PQ_1$ *không lớn hơn 2* (nhỏ hơn hay bằng 2), còn tỉ số $P_2P : PQ_2$ *không nhỏ hơn 2* (lớn hơn hay bằng 2), đpcm.

Bài 301

Cho một tam giác có độ dài các cạnh là a, b, c đồng thời

$$a - b = b - c$$

M là giao điểm các trung tuyến, P là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác đã cho, chứng minh rằng đoạn thẳng MP song song với cạnh có độ dài b.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán cấp II toàn quốc 1977)

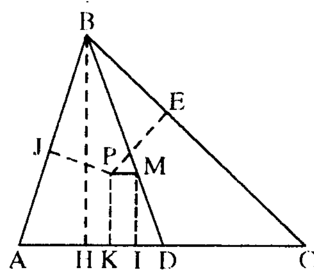
GIẢI *(vắn tắt)*

$$BC = a,\ AB = c,\ AC = b.$$

Kẻ MI ⊥ AC.

Vì MI // BH nên:

$$\frac{MI}{BH} = \frac{MD}{BD} = \frac{1}{3} \qquad (1)$$



Vì P là giao điểm của các đường phân giác nên P cách đều ba cạnh, PK = PJ = PE.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{1}{2}BH \cdot b \quad (2)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}PK(AB + BC + CA)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot PK .$$

Nhưng do a − b = b − c nên a + c = 2b.

Vậy: $S_{ABC} = \frac{1}{2}PK \cdot 3b = \frac{3}{2}PK \cdot b$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\frac{PK}{BH} = \frac{1}{3} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra: PK = MI

Từ đây suy ra PM // AC (vì tứ giác PMIK là hình chữ nhật).

MỘT SỐ GỢI Ý VỀ CÁC BÀI TOÁN CHƯA CÓ KẾT LUẬN

Chương I

24. Tứ giác MNPQ là hình thang cân

25. 1. Δ ADE cân, đỉnh A

2. DF ⊥ AE

47. Tứ giác MNPQ là hình bình hành

48. 1. Tứ giác OPQN là hình bình hành

2. Tìm tất cả các hình bình hành

49 1. O là trung điểm của đoạn thẳng IJ

2. DIBJ là hình bình hành tâm O

3. E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD

4. Ba điểm E, O, F thẳng hàng

61 1. A là trung điểm của IJ

2. IJ = 2EF

3. Δ ABC = Δ MIJ

72 1. IJKL là hình bình hành

2. IJKL và ABCD có cùng tâm

73. 1. B là trung điểm của EF

2. So sánh các đoạn thẳng EF, GH với các cạnh của hình chữ nhật

3. Với vị trí nào của M để EFGH là hình chữ nhật

83 1. EFGH là hình bình hành

2. AF // DF. BH // CH

3. AF, BH, DF, CH cắt nhau tại 4 điểm là đỉnh của một hình thoi

84 IEGH là hình thoi, tâm O.

Chương II

176. 1. (H) là hình bình hành

2. (H') là hình bình hành

3. Các đỉnh của (H) là trung điểm của các cạnh của (H')

4. Các cạnh của (H) thì song song với các cạnh của ABCD, còn các cạnh của (H') thì song song với các đường chéo AC, BD.

5. (H), (H'), ABCD có chung tâm đối xứng.

6. Khi ABCD là hình chữ nhật thì (H) là hình chữ nhật, (H') là hình thoi. Khi ABCD là hình thoi thì (H) là hình thoi còn (H') là hình vuông.

186 1. MNPQ là hình bình hành

2. 1. Chỉ rõ các hình bình hành trên hình vẽ

2. So sánh các tỉ số $\frac{BP}{BC}, \frac{DN}{DA}$.

207. 2. PH // CK, QK // BH, PQ // BC

209. Ba điểm Q, P, C thẳng hàng

208. 1. Các cặp tam giác đồng dạng

Δ DFE $\backsim$ Δ BCE

Δ DEC $\backsim$ Δ BEG

2. Hệ thức

$$EC^2 = EF.EG$$

MỤC LỤC